

83-110 אלגברה ליניארית
מועד א', 19.2.06, יונתן בק

[2 נק'] מס. מחברת שלי _____.

משך הבחינה 2.5 שעות. לקבלת כל הנקודות הציגו את כל העבודה הדרושה לפתרון. יש לנמק כל חישוב שנדרש. חומר עזר ומחשבי כיס אינם מותרים. כל סעיף שווה 5 נקודות.

הציגו את הפתרונות על השאלון הזה בלבד

המחברת מיועדת לחישובים בלבד ולא ייבדק. מקום הנתון לכל שאלה הוא רמז גדול למקום הנדרש לכתוב פתרון. בהצלחה!!

1. נניח ש A היא מטריצה 3×4 עם 2-ים מתחת לאלכסון ו-1-ים בכל מקום אחר:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

a. על ידי חילוף מצאי/פירוק ל A למטריצה L (3×3) כפול U (3×4).

b. מצאי/דרגת A (שמסומנת $\text{rank } A$), ובסיס למרחב האפס של A (הפתרונות המיוחדים הם טובים).

2. יהיו A מטריצה $m \times n$ ו B מטריצה $n \times p$:

a. הסברי/י למה מרחב השורות של AB מוכל במרחב השורות של B .

b. אמת או שקר, הסברי/י: $\text{rank } B - \text{rank } AB = \dim N(AB) - \dim N(B)$.

3. המטריצה הבאה היא מטריצת היטל: $P = \frac{1}{21} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & 4 & -8 \\ -4 & -8 & 16 \end{bmatrix}$

a. P מטילה את \mathbb{R}^3 על תת-מרחב V של \mathbb{R}^3 . מצאי בסיס לתת-המרחב V הזה.

b. מה המרחק בין $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ותת-המרחב V ?

c. מה הערכים העצמיים של P ? האם ניתן ללכסן את P ?

4. תהי A_n המטריצה האנטי-אלכסונית ה- $n \times n$ עם 1-ים על האלכסון המשני, ו-0-ים בשאר המקומות:

$$A_n = \begin{bmatrix} & & & & 1 \\ & 0 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ & 1 & & & 0 \\ 1 & & & & \end{bmatrix}$$

a. מצא/י את הערכים העצמיים של A_n כולל הריבויים שלהם. תזכורת: הריבוי של ערך עצמי λ הוא הממד של המרחב העצמי של λ .

b. מה הם $\det A_{10}$ ו $\det A_{11}$?

c. האם קיימים ארבע ווקטורים עצמיים בלתי תלויים ליניאריים עבור A_4 ? האם אפשר לבחור בהם להיות אורתונורמליים?

d. מהו A_5^{100} ?

5. נתון $c \in \mathbb{R}$ סקלר. תהי $A = QR$ נתון על ידי:

$$A = QR = \begin{bmatrix} -2/5 & 1/5 & -4/5 \\ 1/5 & 2/5 & 2/5 \\ -4/5 & 2/5 & 2/5 \\ 2/5 & 4/5 & -1/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$$

a. אם נתון ש $c = 1$, תן/י בסיס אורתונורמלי למרחב העמודות $C(A)$.

b. עבור איזה ערכים של c מתקיים $\text{rank } A = 2$?

c. מצא/י פתרון למערכת $A^T \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{bmatrix}$.

6. נתון ש $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

a. כתב/י מטריצת הקופקטורים C עבור A .

b. **בשימוש** נוסחת הקופקטורים, מצא/י את A^{-1} ?

c. **בשימוש** A^{-1} מצא/י הפתרון למערכת $A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.