.1

יהיו X_1 ו- X_2 מ"מ מעריכים עם הפרמטרים λ_1 ו- λ_2 בהתאמה, וב"ת.

מצא/י את פונקצית התפלגות המצטברת של $Z = X_1/X_2$. כמו כן, חשב /י את $P(X_1 < X_2)$.

4) אם X_1, ו- X_2 מ"מ חיוביים, אז $Z = X_1/X_2$ מקבל ערכים חיוביים בלבד. ולכן, לכל $a>0$ מתקיים:

$$F_Z(a) = P(Z \leq a) = P(X_1/X_2 \leq a) = P(X_1 \leq aX_2) =$$

$$= \int_0^\infty \int_0^{ax_2} f(x_1,x_2)\,dx_1\,dx_2 = \int_0^\infty \int_0^{ax_2} f_{X_1}(x_1)\cdot f_{X_2}(x_2)\,dx_1\,dx_2 =$$

$$= \int_0^\infty \int_0^{ax_2} \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot e^{-\lambda_1 x_1} \cdot e^{-\lambda_2 x_2}\,dx_1\,dx_2 =$$

$$= \lambda_1 \lambda_2 \int_0^\infty e^{-\lambda_2 x_2} \left(\int_0^{ax_2} e^{-\lambda_1 x_1}\,dx_1 \right) dx_2 =$$

$$= \lambda_1 \lambda_2 \cdot \int_0^\infty e^{-\lambda_2 x_2} \left[-\frac{1}{\lambda_1} \cdot e^{-\lambda_1 x_1} \right]_0^{ax_2} dx_2 =$$

$$= \lambda_1 \lambda_2 \int_0^\infty e^{-\lambda_2 x_2} \left(-\frac{1}{\lambda_1}\right) \left(e^{-\lambda_1 a x_2} - 1\right) dx_2 =$$

$$= \lambda_2 \int_0^\infty e^{-\lambda_2 x_2} - e^{-(\lambda_2 + \lambda_2 a)x_2}\,dx_2 =$$

צמצמנו λ_1 ופתחנו סוגריים (שימו ♡ לסימנים)

$$= \lambda_2 \left[-\frac{1}{\lambda_2} \cdot e^{-\lambda_2 x_2} + \frac{1}{\lambda_2 + \lambda_1 a} \cdot e^{-(\lambda_2 + \lambda_1 a)x_2} \right]_0^\infty =$$

$$= \lambda_2 \left[0 - \left(-\frac{1}{\lambda_2} + \frac{1}{\lambda_2 + \lambda_1 a} \right) \right] = 1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_2 + \lambda_1 a} = \frac{\lambda_1 a}{\lambda_2 + \lambda_1 a}$$

וההסתברות המבוקשת (נטו):

$$P(X_1 < X_2) = P(X_1/X_2 < 1) = F_Z(1) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$$

.2

אם Z הוא משתנה מקרי נורמלי סטנדרטי, חשב את $\mathrm{Cov}(Z, Z^2)$

פתרון:

$$\mathrm{Cov}(Z, Z^2) = E[Z \cdot Z^2] - E[Z]E[Z^2]$$

$$\mathrm{Cov}(Z, Z^2) = E[Z^3] - E[Z]E[Z^2]$$

יודע ש $E\left[Z\right] = 0$, וכמו כן גם $E\left[Z^3\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int x^3 e^{-x^2/2} dx = 0$ שכן זהו אינטגרל מתכנס (בדקו בעזרת מבחן ההשוואה) של פונקציה אי זוגית (ולכן $\int_0^\infty = -\int_{-\infty}^0$).

נקבל ש

$$\mathrm{cov}\left(Z, Z^2\right) = 0 - 0 = 0 .$$

.3

יהי X משתנה מקרי אחיד בקטע $(0,1)$ ויהי Y משתנה מקרי מעריכי עם פרמטר $\lambda = 1$.
בהנחה ש-X ו-Y בלתי-תלויים, מצא את פונקציית ההתפלגות המצטברת של

(א) $Z = X + Y$

(ב) $Z = X|Y$

פתרון:

$X \sim U(0,1)$

$Y \sim \exp(1)$

תחילה נציג 2 פתרונות שנראים נכונים אבל הם שגויים!

(א) דרך ארוכה עם כלל שרשרת ולופיטל

$$P(Z \le t) = P(X+Y \le t) = P(X \le t-Y) = \int_0^\infty P(X \le t-Y|Y=y) f_Y(y)dy = \int_0^\infty P(X \le t-y) f_Y(y)dy$$

$$= \int_0^\infty F_X(t-y) f_Y(y)dy = \int_0^\infty \frac{t-y-0}{1-0} \cdot 1e^{-1y}dy = \int_0^\infty (t-y) \cdot e^{-y}dy$$

$$= t\int_0^\infty e^{-y}dy - \int_0^\infty ye^{-y}dy$$

נשים לב שאת האינטגרל הראשון ניתן להציג כאינטגרל התפלגות ואת השני כתוחלת וזה מקצר את הדרך, אבל אפשר גם לפתור בדרך ישירה וארוכה כך:

$$(uv)' = uv' + u'v$$

$$\int udv = uv - \int vdu$$

$$u = y \qquad dv = e^{-y}dy$$

$$du = 1dy \qquad v = -e^{-y}$$

$$\int ye^{-y}dy = y \cdot (-e^{-y}) - \int -e^{-y} \cdot 1dy = -ye^{-y} + \int e^{-y}$$

$$P(Z \le t) = t\int_0^\infty e^{-y}dy - \left([-ye^{-y}]_{y=0}^{y=\infty} + \int_0^\infty e^{-y}dy \right)$$

$$= (t-1)\int_0^\infty e^{-y}dy - \left[-\frac{\infty}{e^\infty}\right] \overset{\text{לופיטל}}{\triangleq} (t-1)\int_0^\infty e^{-y}dy - \left[-\frac{1}{e^y}\right]^{y=\infty} = (t-1)\int_0^\infty e^{-y}dy$$

$$= (t-1)[-e^{-y}]_{y=0}^{y=\infty} = t-1$$

(א) דרך שנייה

$$P(Z \le t) = P(X+Y \le t) = P(Y \le t-X) = \int_0^1 P(Y \le t-X|X=x)f_X(x)dx = \int_0^1 P(Y \le t-x)f_X(x)dx$$
$$= \int_0^1 F_Y(t-x)f_X(x)dx = \int_0^1 \left(1-e^{-1(t-x)}\right)\cdot\frac{1}{1-0}\,dx = \int_0^1 \left(1-e^{(-t+x)}\right)dx$$
$$= \int_0^1 1\,dx - \int_0^1 e^{-t}e^{x}dx = [x]_{x=0}^{x=1} - e^{-t}\int_0^1 e^{x}dx = 1-e^{-t}[e^{x}]_{x=0}^{x=1} = 1-e^{-t}[e-1]$$
$$= 1+e^{-t}-e^{-t+1}$$

הסבר למה זה לא נכון

קודם כל ברור שלא יכולות לצאת 2 תשובות שונות

מעבר לזה כל אחת מהתשובות שגויה בפני עצמה כי בשני המקרים יצאנו מגבולות פונקיית ההסתברות

במקרה הראשון התחלנו מ: $P(X \le t-Y)$ אבל החלק הימני יכול להיות קטן מאפס וגדול אחד בזמן ש X מוגדר בין 0 ל1

במקרה השני $P(Y \le t-X)$ החלק הימני יכול להיות קטן מאפס בזמן ש Y חייב להיות מאפס ומעלה

הדרך לתקן היא לוודא שלא יוצאים מהגבולות. באפשרות הראשונה אם $t-Y$ קטן מאפס ההסתברות היא 0, אם הוא גדול מאחד ההסתברות היא אחד ואם הוא בין אפס לאחד עושים חישוב

נשים לב ששני המשתנים אי שליליים לכן הסכום שלהם אי שלילי לכן גם t צריך להיות אי שלילי

נחשב עבור הדרך השנייה, היא מתפצלת ל2 מקרים, מה שחישבנו למעלה נכון כאשר $t \ge 1$ כי אז מקבלים $t-X \ge 0$

במקרה השני נניח $0 \le t < 1$ ואז צריך לוודא $X \le t \leftrightarrow t-X \ge 0$ כלומר גבולות האינטגרל השתנו וצריך לרוץ עד t במקום עד 1

$$P(Z \le t) = P(X + Y \le t) = P(Y \le t - X) = \int_0 P(Y \le t - X | X = x) f_X(x) dx = \int_0 P(Y \le t - x) f_X(x) dx$$

$$= \int_0^t F_Y(t-x) f_X(x) dx = \int_0^t \left(1 - e^{-1(t-x)}\right) \cdot \frac{1}{1-0}\, dx = \int_0^t \left(1 - e^{(-t+x)}\right) dx$$

$$= \int_0^t 1\, dx - \int_0^t e^{-t} e^x dx = [x]_{x=0}^{x=t} - e^{-t} \int_0^t e^x dx = t - e^{-t} [e^x]_{x=0}^{x=t} = t - e^{-t}[e^t - 1]$$

$$= t - 1 + e^{-t}$$

תשובה סופית:

$$P(Z \le t) = \begin{cases} 1 + e^{-t} - e^{-t+1} & \text{when} \quad t \ge 1 \\ t - 1 + e^{-t} & \text{when} \quad 0 \le t < 1 \\ 0 & \text{when} \quad t < 0 \end{cases}$$

פתרון (ב): נזכור שהמשתנים ב"ת לכן $f_{X,Y} = f_X \cdot f_Y$

$$P(X | Y \le t) = \int_0^t f_{X|Y}(x) dx = \int_0^t \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} dx = \int_0^t \frac{f_X(x) \cancel{f_Y(y)}}{\cancel{f_Y(y)}} dx = \int_0^t f_X(x) dx = P(X \le t) = F_X(t)$$

ואת זה היה אפשר לאמר מלכתכילה כי הם ב"ת.

4. נתון $X \sim U[0,1]$, מצאו את ההתפלגות של $Y = \lfloor nU \rfloor + 1$ כאשר $\lfloor x \rfloor$ הוא הערך השלם (עיגול כלפי מטה) של x .

פתרון: Y מתפלג אחיד (בדיד!) על הקבוצה $\{1, \ldots, n\}$. החישוב פשוט:

$$P(Y = k) = P(\lfloor nU \rfloor = k - 1) = P(k - 1 < nU < k) =$$
$$= P\left(\frac{k-1}{n} < U < \frac{k}{n}\right)$$

5. יהיה X מ"מ בדיד המקבל ערכים שלמים אי שליליים בלבד. נגדיר את **פונקצית הסיכון** של X כך: $h(r) = P(X = r \mid X \ge r)$.

יהיו $U_1, U_2, \ldots$ מ"מ ב"ת המתפלגים באופן אחיד על הקטע $[0,1]$. הוכיחו כי המ"מ $Z := \min\{n \mid U_n \le h(n)\}$ הוא בעל אותה התפלגות כמו X .

פתרון:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Z=m) &= h(m)\prod_{r=0}^{m-1}\bigl(1-h(r)\bigr)\\ &= \mathbb{P}(X>0)\mathbb{P}(X>1 \mid X>0)\cdots\mathbb{P}(X=m \mid X>m-1)=\mathbb{P}(X=m).\end{aligned}$$

6.**אנטרופיה.** מחלקים את הקטע $[0,1]$ ל n קטעים שונים (שחיתוך כל שניהם מהם ריק ואיחודם הוא $[0,1]$). אורך הקטע ה i הוא p_i כאשר נתונה הסדרה $p_1, p_2, \ldots$. **האנטרופיה** של חלוקה זו מוגדרת כך

$$h=-\sum_{i=1}^{n} p_i \log p_i \ .$$

יהיו $X_1, X_2, \ldots$ מ"מ ב"ת המתפלגים באופן אחיד על הקטע $[0,1]$. נסמן ב $Z_m(i)$ את מספר המשתנים מתוך $X_1, X_2, \ldots, X_m$ אשר ערכם התקבל בתוך הקטע ה i של החלוקה.

הוכיחו כי עבור סדרת המ"מ $R_m=\prod_{i=1}^{n} p_i^{Z_m(i)}$ מתקיים $P\left(m^{-1}\log R_m \xrightarrow{m\to\infty} -h\right)=1$.

רמז: חוק המספרים הגדולים.

פתרון: נסמן ב I_{ij} את האינדיקטור של המאורע " X_j נמצא בקטע ה i ". אז

$$\log R_m=\sum_{i=1}^{n} Z_m(i)\log p_i=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} I_{ij}\log p_i=\sum_{j=1}^{m} Y_j$$

כאשר מגדירים את Y_j כך:

$$1 \le j \le m,\ Y_j = \textstyle\sum_{i=1}^{n} I_{ij}\log p_i$$

נשים לב שהסדרה $Y_1, \ldots, Y_m$ היא סדרה של מ"מ ב"ת בעלי התפלגות שווה.

נחשב את התוחלת של Y_j ונקבל

$$\mathbb{E}(Y_j)=\sum_{i=1}^{n} p_i \log p_i=-h.$$

נשאר רק להסיק מהחוק החזק שהמסקנה הדרושה מתקיימת.