הערות על התרגילים, נשנות חולפות והסתברויות גבוליות

תרגיל 3 – כל השאלות מלבד שאלה 3 (בדף הראשון) הן חזרה טובה על מרטינגלים (חלקן גם שרשראות מרקוב – אבל כאן זה לא חשוב). שאלה 3 קשה מהנדרש

תרגיל 4: (שרשראות מרקוב ומבחנים קודמים):

1. **שרשראות בזמן רציף לא עשינו והן לא למבחן** (חמקה לה פנימה לתרגיל שאלה אחת כזו לדעתי)

2. **מופיע שם המושג של מצב נשנה וחולף בשרשרת** .

מצב נקרא נשנה אם כשמתחילים ממנו בטוח חוזרים אליו מתישהו.

מצב נקרא חולף אם אינו נשנה. קל להראות שלמצב חולף בהסתברות 1 נחזור רק מספר סופי של פעמים. (בכל פעם שחוזרים אליו יש סיכוי p שזו הפעם האחרונה)

ישנה גם תכונה נוספת שנקראת **נישנות חיובית**. לא דברנו עליה בשעור **והיא אינה נדרשת למבחן** (ובשרשרת סופית היא בדיוק זהה לנשנות).

עוד תכונה קלה היא שחולפות היא תכונה מחלקתית.

דברנו על מושגים אלו בהקשר של הילוך מקרי (הראינו שהילוך מקרי פשוט על Z נשנה בעזרת מרטינגלים) וגם הזכרנו את זה לדעתי בקצרה על שרשראות סופיות. זה מופיע גם בדפים.

מכוון שלא דנו בזה ממש בשעור, לא אשאל על נשנות וחולפות בשרשראות אינסופיות.

אך בשרשרת סופית , שם המושג נהייה פשוט יותר, לא צריכה להיות בעייה.

עוד כמה הערות על המושג במקרה של **מספר מצבים סופי**:

אפשר לראות אם מצב הוא חולף או נשנה מגרף המחלקות של השרשרת

בגרף סופי מחלקת קשירות היא חולפת אם ורק אם יש הסתברות חיובית לצאת ממנה. (כי ברגע שיוצאים אי אפשר לחזור – אחרת כל המצבים הנ"ל היו באותה מחלקת קשירות)

בפרט שרשרת סופית אי פריקה היא תמיד נשנית, ותמיד יש בשרשרת לפחות מצב נשנה אחד.

דוגמה: בשאלה 4 בדף הראשון מחלקות הקשירות הן (1,2), (3,4), (5,6)

1,2,5,6 מצבים נשנים ו 3,4 מצבים חולפים   בגרף המחלקות 3 קודקודים והקשתות הן 3 הלולאות ושתי קשתות:

$$(3,4) \to (1,2)\,, \quad (3,4) \to (5,6)$$

,

כשכתוב בתרגיל **למיין את מצבי השרשרת** הכוונה לחלק למחלקות קשירות ולהגיד איזה מצבים נשנים ואיזה חולפים

בחלק מהשאלות (למשל 4 בדף הראשון או 8 בשני) מבקשים לחשב הסתברות גבולית מהצורה

$$\lim_{n\to\infty} P^n(\mathrm{i,j}) = \lim_{n\to\infty} P(X_n = j \,|X_0 = i) = \lim_{n\to\infty} P_i(X_n = j)$$

(השתמשתי בכוונה בשלוש דרכים שונות לכתוב אותו דבר, כולן בסדר מבחינתי)

אם השרשרת היתה אי-פריקה וא-מחזורית, היינו יודעים מהמשפטים שהוכחנו בכיתה שיש התפלגות סטציונרית יחידה π ויש התכנסות לπ (בלי קשר למצב ההתחלתי) ולכן הגבול היה פשוט $\pi(j)$.

אם השרשרת לא אי-פריקה, אז בטוח נבלעים לבסוף באחת המחלקות הנשנות. לכל מחלקה כזו יש מידה סטציונרית שנתמכת רק על המצבים שלה. ואם נניח שהן גם א-מחזוריות (כמו בשאלות 4,8) אז אנו יודעים את הגבול תחת המאורע שנבלע במחלקה מסוימת

כך למשל בשאלה 4, אפשר לסמן $\pi_{1,2}$ את המידה הסטציונרית שנתמכת על מקומות 1,2, וקל לבדוק שהיא מקיימת $\pi_{1,2}(1) = \pi_{1,2}(2) = \frac{1}{2}$,, $\pi_{1,2}(3) = \pi_{1,2}(4) = \pi_{1,2}(5) = \pi_{1,2}(6) = 0$

ואז למשל

$$\lim_{n\to\infty} P_3(X_n = 1) = P_3\big(X_n \textit{ will eventually be inside the component } (1,2)\big) * \pi_{1,2}(1)$$
$$= P_3\big(\tau_{\{1,2\}} < \tau_{\{5,6\}}\big) * \pi_{1,2}(1)$$

כאשר τ_A הוא זמן הפגיעה בקבוצה A, ואת ההסתברות שמופיעה בשורה התחתונה למדנו לחשב בעזרת פתירת מערכת משוואות לינאריות.

3. עוד הערות על התרגילים

לטעמי כל התרגילים בדפים (מלבד נושא נשנות חיובית) פתירים. שאלה 13 כתיבת הוכחה של ממש למקרה שזה כן שרשרת מרקוב מעט קשה יותר, אך הייתי מסתפק בנימוק.

שימו לב שבחלק מהשאלות על שרשראות מרקוב ניתן לקצר לעיתים שלבים על ידי שימוש במרטינגלים אך לא הכרחי.

אם יש לכם שאלות – אתם מוזמנים לפנות אלי ואנסה לעזור.