<u>פונקציות מרוכבות – תרגול 5</u>

אינטגרציה:

נתחיל מהמקרה הפשוט, $f(t)=u(t)+iv(t)$ פונקציה של משתנה ממשי, המוגדרת בקטע $[a,b]$. מגדירים $\int_a^b f(t)dt=\int_a^b u(t)dt+i\int_a^b v(t)dt$.

תרגיל: חשב $\int_0^{2\pi}\left(t+i\sin^2 t\right)dt$

פתרון: $\int_0^{2\pi}\left(t+i\sin^2 t\right)dt=\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{2\pi}+i\int_0^{2\pi}\sin^2 t dt=2\pi^2+\pi i$

נעבור להגדרת האינטגרל של פונקציה של משתנה מרוכב על מסילה γ. כדי לחשב את $\int_\gamma f(z)dz$. יש למצוא פרמטריזציה עבור המסילה $z(t):[a,b]\to\mathbb{C}$ ואז מחשבים $\int_a^b f(z(t))z'(t)dt$.

תרגיל: מצאו פרמטריזציה עבור הישר המחבר בין שתי הנקודות P,Q (מתחילים בP)

פתרון $z(t)=P+t(Q-P)$ בקטע $[0,1]$

תרגיל: חשבו את האינטגרל $\int_\gamma xdz$ כאשר γ היא הקטע הישר מ-0 אל $1+i$.

פתרון: ע"פ התרגיל הקודם יש לנו פרמטריזציה $z(t)=0+t(1+i-0)=t(1+i)$.

$f(z(t))=f(t+it)=t$ $z'(t)=1+i$. בסה"כ $\int_\gamma xdz=\int_0^1 t(1+i)dt=\frac{1}{2}(1+i)$.

תרגיל: חשבו את האינטגרל $\int_\gamma xdz$, כאשר γ היא קשת הפרבולה $y=x^2$ מהראשית אל $1+i$.

פתרון: כאן פרמטריזציה למשל היא $z(t)=t+it^2, t\in[0,1]$ $z'(t)=1+2it$ $f(z(t))=t$

ומקבלים $\int_\gamma xdz=\int_0^1 t(1+2it)dt=\frac{1}{2}+\frac{2}{3}i$.

הערה: קיבלנו תוצאות שונות כי הפונקציה $f(z)=x=\operatorname{Re} z$ איננה אנליטית. ישנו משפט שאומר שאם f אנליטית, אז האינטגרל תלוי אך ורק בנקודות הקצה.

תרגיל: (אם למדנו חסם ML)

העריכו את הביטוי $\int_\gamma \left(x^2+iy^2\right)dz$ בערך מוחלט, כאשר γ היא הישר מ $-i$ אל i.

פתרון: $L=2$ $M=\max\limits_{x=0,-1\le y\le 1}\left|x^2+iy^2\right|=\max\left|y^2\right|=1$. מקבלים $\left|\int\right|\le 2$.

משפט: תהי f גזירה בתחום D ובעלת פונקציה קדומה F. תהיינה שתי נקודות $A,B\in D$ אזי לכל מסילה מ-A אל B מתקיים $\int_\gamma fdz=F(B)-F(A)$.

תרגילים שונים ממבחנים:

מועד ב' תש"ע

3. חשבו את $\int_\gamma \cos zdz$ כאשר γ היא קשת של האליפסה $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ מהנקודה $(2,0)$ עד הנקודה $(0,3)$

פתרון "שגוי": לעשות פרמטריזציה, משהו כמו $x=2\cos t, y=3\sin t$ ולחשב ישירות.

פתרון "נכון": לקוסינוס יש קדומה בכל המישור: $\sin'=\cos$, ולכן
$$\int_\gamma \cos zdz=\left[\sin z\right]_2^{3i}=\sin(3i)-\sin(2)$$

מועד א' תש"ע

3. חשבו $\int_\gamma \left(z+\bar{z}\right)\left(z-\bar{z}\right)dz$ כאשר γ משולש בעל קדקדים ב-0,1 ו-i מתואר נגד כיוון השעון.

פתרון: הפעם יש פונקציה מלוכלכת (הצמוד בעייתי), ואין מנוס אלא לחשב כמו טמבל.

נחלק את γ לשלושה חלקים פשוטים ונסכום את התוצאות.

γ_1, הקטע הישר מ-0 עד 1. פרמטריזציה לדוגמא $z_1(t)=t$ $\int_{\gamma_1} fdz=\int_0^1 2t*0*1dt=0$

γ_2 , הישר בין 1 ל-i. פרמטריזציה $z(t)=1+t(i-1)=1-t+ti$ ואז
$$\int_{\gamma_2} fdz=\int_0^1 2(1-t)2ti(i-1)dt=4i(i-1)\int_0^1\left(t-t^2\right)dt=4i(i-1)\frac{1}{6}=2i(i-1)=-\frac{2}{3}-\frac{2}{3}i$$

האינטגרל השלישי יוצא גם הוא אפס. ובסה"כ $\int_\gamma fdz=\int_{\gamma_1} fdz+\int_{\gamma_2} fdz+\int_{\gamma_3} fdz=-\frac{2}{3}-\frac{2}{3}i$

מועד א' תשס"ח

2. עבור $n\in\mathbb{N}$ חשבו את האינטגרל $\int_\gamma z^n\bar{z}dz$ כאשר γ מורכב מקטע ישר מ-0 עד 1 ואח"כ קשת מעגל היחידה עד ל-i ובסוף קטע ישר עד 0.

פתרון:

גם כאן נפצל לשלושה אינטגרלים.

$$\int_{\gamma_1} z^n\bar{z}dz=\int_{\gamma_1} z^{n+1}dz=\left[\frac{z^{n+2}}{n+2}\right]_{z=0}^{z=1}=\frac{1}{n+2}$$

$$\int_{\gamma_2} z^n\bar{z}dz=\int_{\gamma_2} z^{n-1}dz=\left[\frac{z^{n}}{n}\right]_{z=1}^{z=i}=\frac{i^n-1}{n}$$

$$\int_{\gamma_3} z^n\bar{z}dz=-\int_{\gamma_3} z^{n+1}dz=\left[-\frac{z^{n+2}}{n+2}\right]_{z=i}^{z=0}=0+\frac{i^{n+2}}{n+2}$$

ויש לסכום את שלושתם.

מועד א' תשס"ח

3. חשבו $\int_\gamma\left(z+\frac{1}{z}\right)dz$ כאשר γ היא המסילה הנתונה ע"י

$$z(t)=\sin 2t+i\left(4\cos t+2t\right):0\le t\le\frac{\pi}{2}$$

פתרון: נרצה להגיד שיש פונקציה קדומה $\frac{z^2}{2}+\log z$. אבל יש להיזהר. $\log$ אינה פונקציה. צריכים לבחור ענף של הלוגריתם ולוודא ש-γ נשארת בתחום שבו הענף גזיר. ניקח את $\frac{z^2}{2}+Log\left(z\right)$ כאשר ב-Log הארגומנט נמצא בקטע $\left(-\pi,\pi\right]$. הענף בעייתי בציר ה-x השלילי. נבדוק שהמסילה לא עוברת שם. $\sin 2t\ge 0$ ויש שוויון אך ורק עבור $t_{1,2}=0,\frac{\pi}{2}$ בשני המקרים הללו מקבלים $4\cos t+2t\neq 0$ ולכן הכל בסדר.

בסה"כ האינטגרל הוא

$$\left[\frac{z^2}{2}+Logz\right]_{4i}^{\pi i}=-\frac{\pi^2}{2}+Log\left(\pi i\right)-\left(-8+Log\left(4i\right)\right)=-\frac{\pi^2}{2}+\ln\pi+i\frac{\pi}{2}-\left(-8+\ln 4+i\frac{\pi}{2}\right)=\ln\frac{\pi}{4}+8-\frac{\pi^2}{2}$$

.