בס"ד

אוניברסיטת בר-אילן
מבחן בקורס: אלגברה מופשטת 1 (סמסטר קיץ)
מספרי הקורס: 8821105 + 8821108
המרצים: רוני ביתן, מיכאל מגרל
המתרגלים: תומר באואר, עופר בוסאני, לואי פולב

תאריך: 02.09.13 מועד א'
חומר עזר: רק מחשבון רגיל
משך המבחן: שעתיים וחצי

יש לפתור בדיוק 4 מתוך 5 שאלות (כל שאלה שווה 25 נקודות)
בנוסף יש גם שאלת בונוס השווה 5 נקודות.
נמקו היטב את כל התשובות.

השאלות:

1.

א. הוכיחו את משפט Lagrange.

ב. תהיינה שתי חבורות G_1, G_2 כך ש: $\left(|G_1|,|G_2|\right)=1$. כמה הומומורפיזמים שונים $G_1 \to G_2$ קיימים?

ג. נתונות 6 חבורות מסדר 40. זהו אילו חבורות איזומורפיות זו לזו:

$$\mathbb{Z}_{40}\,,\ \mathbb{Z}_5\times\mathbb{Z}_8\,,\ \mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_{10}\,,\ \mathbb{Z}_5\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_4$$
$$\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_5\,,\quad U_{10}\times\mathbb{Z}_{10}$$

2.

א. הוכיחו את משפט Euler על חזקות ופתרו את המשוואה $16x \equiv 29!\cdot 25^{92} \pmod{31}$.

ב. האם קיים מונומורפיזם $U_9 \to S_7$?

ג. הוכיחו: בחבורת מנה $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ הסדר של כל איבר הוא סופי, אבל החבורה אינה נוצרת סופית.

3.

א. הוכיחו את המשפט: כל חבורת-p היא פתירה.

תנו לפחות 4 דוגמאות של חבורות לא איזומורפיות בעלות 27 אברים.

ב. הוכיחו או הפריכו: לכל מספר ראשוני p ולכל $n\geq 3$ טבעי קיימת חבורה <u>לא אבלית</u> בעלת p^n אברים.

ג. תארו תמונות אפימורפיות של החבורה $G := U_{10}\times\Omega_5$. כמה אוטומורפיזמים יש ל- G?

4.

א. האם קיימת חבורה אבלית G, כך ש- $\exp(G)=4$, $|G|=32$, ו- $[G:2G]=4$?

ב. תהא G חבורה לא אבלית מסדר p^3 (p ראשוני). נניח $a \notin Z(G)$. הוכיחו:

$$|Z(G)|=p,\ |C_a|=p^2,\ |conj(a)|=p$$

ג. הראו כי $H=\langle(123\ldots n)\rangle \ntrianglelefteq S_n$ לכל $n>3$.

.5

א. תהא G חבורה מסדר p^2q עבור p,q ראשוניים. הוכיחו ש-G אינה פשוטה.

ב. הוכיחו שהמרכז של החבורה הסימטרית S_n עבור $n\geq 3$ הוא טריוויאלי.

ג. מצאו את מספר הריבועים השונים (כלומר, עד כדי סיבוב או שיקוף) אשר מתקבלים מריבוע נתון, אם מותר לצבוע קודקודים ב-2 צבעים נתונים.

שאלת הבונוס:

תנו דוגמה של חבורה G בעלת 125 אברים כך שקיימים עבור G בדיוק 25 אוטומורפיזמים פנימיים (לנמק).

בהצלחה ושנה טובה !

☺

פתרון מועד א' באלגברה מופשטת 1

10.09.13

(הערה: יש בד"כ מספר דרכים לפתרון)

שאלה 1:

א. ראו בהרצאה.

ב. עפ"י משפט איזו' 1: $G_1/\ker(f)\cong \mathrm{Im}(f) \Leftarrow \left|\mathrm{Im}(f)\right| = \dfrac{|G_1|}{|\ker(f)|} \Leftarrow \left|\mathrm{Im}(f)\right| \mid |G_1|$

כמו כן: $\mathrm{Im}(f)\leq G_2 \Leftarrow \left|\mathrm{Im}(f)\right| \mid |G_2|$. אבל: $(|G_1|,|G_2|)=1$ ולכן: $\left|\mathrm{Im}(f)\right|=1$.

מכאן שההומומורפיזם היחיד הוא הטריוויאלי.

ג. $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_5,\quad \mathbb{Z}_5\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_4\simeq\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_{10}\simeq U_{10}\times\mathbb{Z}_{10},\quad \mathbb{Z}_{40}\simeq\mathbb{Z}_5\times\mathbb{Z}_8,$

אחת מהאפשרויות להסבר קצר זאת צורה קנונית.

שאלה 2:

א. כיוון ש-31 ראשוני, עפ"י משפט וילסון: $29!=\dfrac{30!}{30}\equiv -30^{-1}\equiv 1 \pmod{31}$.

עפ"י משפט פרמה: $25^{30}\equiv 1\pmod{31} \Leftarrow 25^{92}=\left(25^{30}\right)^3\cdot 25^2\equiv 625\equiv 5\pmod{31}$

כמו כן: $16^{-1}=2\left(\bmod 31\right)$. מכאן: $x\equiv 10\bmod 31$.

ב. U_9 היא ציקלית מסדר 6 לכן השאלה היא האם קיימת ת"ח ציקלית מסדר 6 ב- S_7 והתשובה היא כן. למשל: $f:U_9=\langle 2\rangle\to S_7,\ 2\mapsto(123456)$.

ג. בכתיב חיבורי: $\forall a\in\mathbb{Q}:\exists m\in\mathbb{N}\mid ma\in\mathbb{Z}\Rightarrow m\underbrace{(a+\mathbb{Z})}_{\in\mathbb{Q}/\mathbb{Z}}=\mathbb{Z}$.

נניח בשלילה כי: $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ נוצרת סופית. הראינו שכל האיברים הם מסדר סופי ולכן הכמק"ב של סדרי כל היוצרים האלה הוא מספר סופי m. מתוך האבליות נוכל להציג כל איבר ב-$\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ כמכפלה של חזקות של היוצרים. מכאן שסדר כל איבר מחלק את m ובפרט קטן או שווה אליו. אבל למשל $\frac{1}{m+1}$ הוא מסדר $m+1$. סתירה.

שאלה 3:

א. כל חבורת-p היא פתירה: ראו בהרצאה.

$$\mathbb{Z}_{27},\ \mathbb{Z}_9\oplus\mathbb{Z}_3,\ \mathbb{Z}_3^3,\ \mathbb{H}(\mathbb{Z}_3)$$

(כאשר $\mathbb{H}(\mathbb{Z}_3)$ חבורת Heisenberg מעל $\mathbb{Z}_3$).

ב. חבורת Heisenberg מעל $\mathbb{Z}_p$ היא חבורה לא אבלית עם p^3 איברים. כעת נוכל להרחיב אותה ע"י מכפלה ישרה ב-$\mathbb{Z}_p^{n-3}$ שהיא בעלת p^{n-3} איברים לכל $n\geq 3$. התוצאה תישאר לא אבלית.

ג. $G\simeq\mathbb{Z}_4\oplus\mathbb{Z}_5\simeq\mathbb{Z}_{20}$. הגרעינים האפשריים הם כל ת"ח הנורמליות (כולן במקרה האבלי), קרי מכל סדר שמחלק את 20 והן: $\mathbb{Z}_{20}=\langle 1\rangle,\langle 2\rangle,\langle 4\rangle,\langle 5\rangle,\langle 10\rangle,\langle 20\rangle=\{0\}$.

כל ת"ח $\langle i\rangle$ היא גרעין של: $f:x\mapsto\frac{20}{i}x$ (בכתיב חיבורי) ולכן התמונות הן: $\left\langle\frac{20}{i}\right\rangle$ בהתאמה:

$\{0\},\mathbb{Z}_2,\mathbb{Z}_4,\mathbb{Z}_5,\mathbb{Z}_{10},\mathbb{Z}_{20}$.

עפ"י מה שראינו בכיתה: $Aut(\mathbb{Z}_{20})\simeq U_{20}$ כלומר ישנם: $\varphi(20)=8$ אוטומורפיזמים.

שאלה 4:

א. $\exp(G)=4$, $|G|=32$ ומכאן G איזומורפית ל- $\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_4\oplus\mathbb{Z}_4$ או ל- $\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_4$.

מתקיים:

$$\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_4\oplus\mathbb{Z}_4\Big/2(\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_4\oplus\mathbb{Z}_4)\cong\mathbb{Z}_2\big/2\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_4\big/2\mathbb{Z}_4\oplus\mathbb{Z}_4\big/2\mathbb{Z}_4\cong\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2$$

והסדר המתקבל הוא שמונה.

$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4 \Big/ 2\left(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4\right) \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ וסדר החבורה הוא 16.

בכל מקרה לא מקבלים $\left[G:G^2\right]=4$ ולכן אין חבורה כזו.

שימו לב שמבלי לעבור למנה, יכולנו לחשב את הסדרים ישירות. למשל, במקרה הראשון: הסדר של החבורה $2\left(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_4\right)$ הוא 4, ולכן $\left[G:2G\right]=8$ בסתירה לנתון.

ב. מכיוון ש- $1,a \in C_a$ מתקיים $|C_a|>1$. $C_a \le G$ ולכן $|C_a|<|G|$ (כי $a \notin Z(G)$). כמו כן מתקיים $Z(G) \le C_a$ (ניתן לראות זאת גם ישירות וגם באמצעות העובדה שחיתוך כל המְרַכְּזִים הוא המֶרְכָּז). G היא חבורת –p ולכן $|Z(G)|>1$ ולכן $|Z(G)| \in \left\{p,p^2\right\}$.

לא יתכן ש: $\left|Z(G)\right|=p^2$ שכן אז $G \Big/ Z(G)$ תהיה ציקלית בסתירה לטענה שהוכחנו.

לכן $\left|Z(G)\right|=p$. מתקיים $\left\{a \cup Z(G)\right\} \subseteq C_a$ ומכיוון ש- $a \notin Z(G)$ מתקיים:

$|C_a| \ge |a \cup Z(G)| > p$. לכן ממשפט לגרנז' ניתן להסיק כי $|C_a|=p^2$.

אם G פועלת על עצמה על ידי הצמדה אזי $C_a = Stb(a)$ ולכן:

$|conj(a)| = \left[G:Stb(a)\right] = \left[G:C_a\right] = \frac{|G|}{|C_a|} = p$ ומכאן: $|conj(a)|=p$.

ג. כדי ש- H תהיה נורמלית ב- S_n היא צריכה להכיל את מחלקת הצמידות של היוצר שלה, כלומר את כל התמורות ב- S_n מהטיפוס של עגיל באורך n. אבל היא לא מכילה למשל את $(132...n)$.

אפשרות אחרת: שימו לב שאם $H \triangleleft S_n$ אזי $\mathrm{conj}(12\cdots n) \subseteq H$ ומצד שני $\forall n>3 \quad |H| = n < (n-1)! = |\mathrm{conj}(12\cdots n)|$.

שאלה 5:

א. אם $n_p=1$ או $n_q=1$ אז סיימנו. אחרת מתקיים: $n_q \in \left\{p,p^2\right\} \ \wedge \ n_p = q$.

אם Q היא תת חבורה q-סילו אזי היא ציקלית וכל איבר ב- $Q \setminus \{e\}$ יוצר אותה. לכן יש ב- G $n_q(q-1)$ איברים מסדר q.

אם $n_q=p^2$ אזי יש $p^2(q-1)$ איברים מסדר q. מכיוון שיש ב- G p^2q איברים, נקבל שנותרו רק p^2 איברים שאיחודם הוא תת חבורה מסדר p^2. יש מקום רק לחבורה אחת מסדר p^2, ולכן חבורת p-סילו היא יחידה ולכן נורמלית. ולכן החבורה אינה פשוטה.

אם $n_q = p$ וגם $n_p = q$ אזי $q \equiv 1(\bmod p) \wedge p \equiv 1(\bmod q)$ וזאת סתירה, כי אם למשל $p < q$ (בה"כ) אזי $p \equiv p(\bmod q) \not\equiv 1(\bmod q)$.

ב. תהא $id \neq a \in Z(S_n)$. תהי $a \neq b \in S_n$ בעלת אותו מבנה מחזורים כמו a (ולכל איבר פרט לאיבר היחידה יש איבר השונה ממנו עם אותו מבנה מחזורים). אזי a,b הן תמורות צמודות; משמע, קיימת תמורה $w \in S_n$ כך ש- $waw^{-1} = b$. מתקיים $b = waw^{-1} = aww^{-1} = a$ ולכן $a = b$ בסתירה להנחה.

אפשרות אחרת: אם $id \neq a \in Z(S_n)$ אז קיים $a(i) = j \neq i$. בגלל $n \geq 3$ קיים $k \in \{1,2,\cdots,n\}, k \neq i, k \neq j$. אזי $a(ik)a^{-1} = (ja(k))$ ו $(ik) \neq (ja(k))$. מצד שני בגלל $a \in Z(S_n)$ נקבל $a(ik)a^{-1} = (ik)$. סתירה!

ג. נמספר את קודקודי הריבוע ונקבל שיוצרי D_4 המתמירים אותם הם: $a = (1234),\ b = (12)(34)$.

החבורה D_4 פועלת על מרחב הצביעות האפשריות: $X = \{f : \{1,2,3,4\} \to \{1,2\}\}$.

נבנה את טבלת קבוצות השבת ביחס לאיברי D_4:

$g \in D_4$	*Class*	$\lvert X_g \rvert$	*Sum*
id	$(a)(b)(c)(d)$	2^4	2^4
a, a^3	$(abcd)$	2	$2 \cdot 2$
a^2, b, ba^2	$(ab)(cd)$	2^2	$3 \cdot 2^2$
ba, ba^3	$(ab)(c)(d)$	2^3	$2 \cdot 2^3$

עפ"י משפט Burnside נקבל שמס' המסלולים הוא: $k = \frac{1}{8}\left(2^4 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2^3\right) = 6$.

שאלת הבונוס:

חבורת Heisenberg מעל $\mathbb{Z}_5$ היא בעלת $5^3 = 125$ איברים. המרכז שלה הוא: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : x \in \mathbb{Z}_5 \right\}$.

מתוך ההרצאה אנחנו יודעים ש: $G/Z(G) \simeq Inn(G)$ לכן במקרה שלנו: $\lvert Inn(G) \rvert = \frac{125}{5} = 25$.