טיפים ורמזים לתרגיל 3 בשיעורי בית - אינפי 3 תש"פ

1. על מנת להראות שקבוצה היא פתוחה, לעיתים קל יותר להראות שהמשלים הוא סגור.

2. אם רוצים להוכיח פתיחות של קבוצה ישירות, ולהראות ישירות, מספיק להראות שלכל נקודה יש סביבה כדור פתוח בנורמת מקסימום. (ראינו בתרגולים שנורמה הסטנדרטית, נורמה 1 ונורמת אינסוף הן שקולות).

3. על מנת להראות שקבוצה היא סגורה, לעיתים קרובות כדאי להשתמש במשפט שאומר ש X סגורה אם ורק אם לכל סדרה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ב X שמתכנסת ל x, $x \in X$. (מכילה את כל הגבולות של סדרות בתוכה שתנכסות).

4. סדרה ב $\mathbb{R}^n$ מתכנסת אם ורק אם מתכנסת רכיב רכיב. (כך מראים שקבוצה היא סגורה).

5. אם $f : X \to \mathbb{R}$ רציפה וסדרה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ של איברים ב X מתכנסת ל x, אזי

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = x .$$

6. על מנת להראות שגבול של סדרה נמצא בקבוצה הרצויה, מומלץ להשתמש בתכונה הבאה. אם אם $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ אזי:

   (א) אם $a_n \le M$ לכל n, אזי $a \le M$ (שימו לב, $\le$ נחוץ, כי ייתכן ש $a_n < M$ לכל n, $a_n = M$).

   (ב) אם $m \le a_n$ לכל n, אזי $m \le a$.

   (ג) אם $b = a_n$ לכל n, אזי $a = b$. (גבול של סדרה קבועה זה הערך היחיד שמופיע בסדרה).

   (ד) אם $m \le a_n \le M$ לכל n, אזי $m \le a \le n$.

7. כאשר קבוצה מוגדרת על משוואות מהצורה $\{x | f(x) > a, g(x) \neq b\}$, אם מופיע $=, \ge, \le$ באילוץ, הקבוצה, ברוב המקרים הקבוצה תהיה סגורה. ואם מופיע $<, >, \neq$ ברוב המקרים הקבוצה תהיה פתוחה. (שימו לב, הכוונה כאם ש f, g הן פונקציות רציפות. אילוץ מהצורה $a^n, n \in \mathbb{N}, n \neq 3, 4, 5$ הוא לא אילוץ מהצורה שתיארנו). כלל אצבע - ניתן להתשמש בכל נורמה שאתם רוצים, כל עוד היא מקלה על החישובים שלכם.

8. לעיתים, קל יותר לתאר קבוצה על ידי איחוד או חיתוך של קבוצות פשטות יותר. למשל

$$\left\{(x, y) | x^2 + y = 3 \wedge x^3 + y^2 \ge 4\right\}$$

אפשר להציג בתור

$$\{(x,y)\,|x^2+y=3\}\cap\{(x,y)\,|x^3+y^2\geq 4\}$$

ולהראות שכל קבוצה בחיתוך היא סגורה.

9. קבוצה חסומה אם ורק אם היא חסומה רכיב-רכיב.

10. קבוצה היא קומפקטית ב $\mathbb{R}^n$ אם ורק אם חסומה וסגורה. זאת אומרת, שצריך להוכיח למעשה שתי טענות. כל אחת דיי פשוט להוכיח בנפרד.

11. כשאתם לא בטוחים אם מדובר בהוכחה או הפרכה, תנסו דוגמאות פשוטות. אם טענה לא עובדת עבור אחת מהדוגמאות הפשוטות שניסיתם, מדובר בהפכרה. למשל, מה היא הקבוצה הכי פשוטה שאפשר לחשוב עליה שהיא לא קבוצה סגורה? מה היא פונקציה הכי פשוטה שאפשר לחשוב עליה? מה היא הקבוצה הכי פשוטה שיש לה נקודת הצטברות? האם הטענה נכונה גם במקרה הזה? אם אתם לא יודעים מאיפה להתחיל, התחילו משם.

12. כשאתם מקבלים קבוצה "מוזרה", תנסו להבין איך היא נראית. לצורכנו, האם יש נקודות שהן פנימיות? מבודדות? מי הן נקודות הצטברות של הקבוצה? למשל, דרך נוספת לחשוב על נקודות הצטברות של קבוצה בנוסף לגבולות, היא באופן הבא: p היא נקודת הצטברות של A אם ניתן לקרב אותה על ידי איברים של A. דוגמה: כל מספר ממשי, אפשר לקרב על ידי מספר רציונלי. כל מספר ממשי ב $[0,1]$, אפשר לקרב על ידי טור מהצורה

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}a_nk^{-n}$$

כאשר ו k הוא מספר טבעי, $a_n\in\{0,1,\ldots,k-1\}$ ולכן כל $x\in[0,1]$ הוא נקודת הצטברות של סכומים סופיים מהצורה

$$.x=\sum_{n=1}^{N}a_nk^{-n}$$

13. כמובן, שהרשימה לא כוללת את כל השיטות האפשריות, ואם מצאתם דרך נוחה יותר להראות טענה מסויימת, השתמשו בה.