תרגיל 4 – מופשטת

שאלה 1

א. האם קיים מונומורפיזם מ- $GL_5(\mathbb{Q})$ ל- $(\mathbb{Q}^5,+)$? (כאשר- $\mathbb{Q}^5=\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$).

ב. האם קיים אפימורפיזם מ- $(M_5(\mathbb{Q}),+)$ ל- $(\mathbb{Q}^5,+)$?

שאלה 2

א. הראו שהומומורפיזם $\varphi:G\to H$ הוא חח"ע אם ורק אם $\ker\varphi=\{1_G\}$.

ב. הראו שאם $\varphi:G\to H$ איזומורפיזם, אזי $o(\varphi(a))=o(a)$ לכל $a\in G$.

ג. הראו שהומומורפיזם מעביר קבוצת יוצרים לקבוצת יוצרים.

שאלה 3

א. הוכיחו שחיתוך כלשהו של תתי חבורות הוא תת חבורה.
ב. יהיו $H,K\leq G$ תת חבורות. נגדיר את הקבוצה $HK=\{hk:h\in H,k\in K\}$. הוכיחו: HK תת חבורה של G אם ורק אם $HK=KH$.
ג. הסיקו מסעיף א' כי אם N ת"ח נורמלית של G ו- H ת"ח של G אז HN ת"ח של G.
ד. הוכיחו כי אם N_1,N_2 תח"נ של G אז $N_1\cap N_2$ ו- N_1N_2 תח"נ של G.

שאלה 4

תהי D_4 החבורה הדיהדרלית ויהיו $\sigma,\tau\in D_4$ (כאשר τ איבר מסדר 2 – שיקוף, ו- σ איבר מסדר 4 – סיבוב ב- 90 מעלות).

נגדיר את תתי החבורות הציקליות $H=\langle\tau\rangle$, $K=\langle\sigma^2\rangle$.

א) כתבו במפורש את אברי תתי החבורות H,K וחשבו את $[D_4:H],[D_4:K]$.

ב) כתבו את המחלקות השמאליות של H,K ב- D_4. האם H,K הן תת חבורות נורמליות?

שאלה 5

הוכיחו שהפונקציות הבאות הן הומומורפיזמים ומצאו אם הן חח"ע ו/או על:

א) $f:(\mathbb{C}^*,\cdot)\to(\mathbb{C}^*,\cdot)$ המוגדרת ע"י: $f(x)=x^5$

ב) $f:(\mathbb{Q}^*,\cdot)\to(\mathbb{Q}^*,\cdot)$ המוגדרת ע"י: $f(x)=x^5$

ג) $f:\mathbb{Z}_6\to G$ באשר $G=\left\{\begin{pmatrix}1&a&b\\0&1&c\\0&0&1\end{pmatrix}:a,b,c\in\mathbb{Z}\right\}$ עם כפל מטריצות, והפונקציה מוגדרת ע"י $x\to\begin{pmatrix}1&0&x\ (\mathrm{mod}\ 3)\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

שאלה 6

בתרגיל בית הקודם, הוכחתם כי $G=\left\{\begin{pmatrix}a&b\\-b&a\end{pmatrix}\mid a,b\in R,a^2+b^2>0\right\}$ חבורה. הוכיחו כי $G\cong\mathbb{C}^*$.

שאלה 7

תהיינה $A,B\leq G$ תת חבורות. הניחו שכל האינדקסים הם סופיים והוכיחו:

א. $[A:A\cap B]\leq[G:B]$. הדרכה: מצאו $f:\{a(A\cap B):a\in A\}\to\{gB:g\in G\}$ חח"ע.
ב. הסיקו ש- $[G:A\cap B]\leq[G:A]\cdot[G:B]$.
ג. $[A:A\cap B]=[G:B]$ אם ורק אם $G=AB$.
ד. אם $[G:A],[G:B]$ זרים, אז $[G:A\cap B]=[G:A]\cdot[G:B]$.

שאלת בונוס (10 נק')

הגדרה: חבורה G היא פשוטה אם אין לה ת"ח נורמליות לא-טריוואליות.

נתון כי $G_1\subseteq G_2\subseteq G_3\subseteq\ldots$ חבורות פשוטות. הוכיחו כי $G=\bigcup_n G_n$ חבורה פשוטה.

- שאלה 7 ושאלת בונוס הן ברמת מבחן.

בהצלחה!