האחרים. טענו כי קבלתו מוליכה ל״אוריינטציה דו־ערכית״, אשר משמעה בין שאר הדברים, כי כל דבר — או שהוא לבן או שהוא שחור, כך שאין תחום הביניים מוצא. אולם אף־על־פי שהטענה ״זה שחור״ איננה יכולה להיות אמיתית יחד עם הטענה ״זה לבן״ (כאשר המלה ״זה״ מציינת את אותו הדבר בדיוק בשתי הטענות), אין האחת הכחשתה או סתירתה של השנייה. לכל הדעות אין שתיהן יכולות להיות אמיתיות ביחד, אולם שתיהן ביחד יכולות להיות שקריות. הן מנוגדות, אבל אינן סותרות. השלילה, או הסתירה, ל״זה לבן״ היא ״~ זה לבן״, ואחת משתי הטענות מן ההכרח שתהיה אמיתית — אם המלה ״לבן״ משמשת בדיוק באותו המובן בשני המקרים. בהיותו מוגבל לטענות המכילות מונחים חד־משמעיים לחלוטין ומדוייקים כליל, חוק השלישי הנמנע אמיתי בהחלט גם הוא.

אם כי שלושת החוקים הינם אמיתיים, אפשר להטיל ספק אם זכאים הם למעמד הבכורה והיסוד שהמסורת יחסה להם. הראשון והשלישי אינם הצורה היחידה של טאוטולוגיה, והסתירה המפורשת $p \cdot \sim p$ איננו [illegible] הטיעון הסותר את עצמו היחיד. ואף־על־פי־כן שלושת חוקי החשיבה עשויים להחשב כבעלי מעמד יסודי מסויים מבחינת לוחות האמת. במלאנו את העמודות העוקבות בהסתמכנו על העמודות ההתחלתיות, חוק הזהות הוא המנחה אותנו: אם האות א נרשמה מתחת לסמל בשורה מסויימת, הרי שבמלאנו את העמודות האחרות שמתחת לביטויים המכילים אותו סמל, בהגיענו לאותה שורה אנו רואים את אותו סמל כמצויין עדיין באות א. במלאנו את העמודות ההתחלתיות, אנו שמים בכל שורה או א או ש, לפי שחוק השלישי הנמנע מנחה אותנו; ובשום מקום איננו שמים א ו־ש ביחד, לפי שחוק הסתירה מנחה אותנו. אפשר לראות בשלושת חוקי החשיבה עקרונות בסיסיים השולטים בבניית לוחות האמת.

ועם זאת, הובה להעיר שכאשר מנסים לערוך את תורת ההיגיון כמערכת, לא זו בלבד ששלושת החוקים אינם יותר ״חשובים״ או יותר ״פוריים״ מכל חוק אחר, אלא שיש טאוטולוגיות אחרות פוריות יותר [illegible] דדוקציה — ולפיכך חשובות יותר — מאשר שלושת החוקים שנדונו כאן. מכל מקום, טיפול בנקודה זו חורג מעבר להיקפו של ספרנו.[8]

8. לדיון נוסף בעניינים אלה, הקורא המעוניין יוכל לעיין בחלק השלישי של Readings on Logic, בעריכת I.M. Copi ו־J.A. Gould (New York: The Macmillan Company, 1964), ובחלק התשיעי של Contemporary Readings in Logical Theory, בעריכת אותם העורכים ובאותה הוצאה, שנת 1967.

פרק 9

דרך הדדוקציה

1. הוכחה צורנית לתקפות

אם כי בתיאוריה מתאימים לוחות האמת כדי לבחון תקפותו של כל טיעון מן הסוג שנדון כאן, למעשה הם גדלים מהר מאוד ככל שגדל מספר הטענות המרכיבות את הטיעון. דרך יעילה יותר לקביעת תקפותו של טיעון מורחב היא לגזור את מסקנתו מהקדמותיו בעזרת רצף של טיעונים יסודיים אשר כל אחד מהם ידוע כתקף. טכניקה זו מתאימה כדבעי לדרכים הרגילות של הארגומנטציה.

התבונן, למשל, בארגומנט זה:

אם אנדרסון מונה, הרי שהוא הלך לבוסטון.
אם הוא הלך לבוסטון, הרי שערך שם מסע־בחירות.
אם הוא ערך שם מסע־בחירות, הרי שנפגש עם דוגלס.
אנדרסון לא נפגש עם דוגלס.
או שאנדרסון מונה או שמישהו ראוי יותר נבחר.
לכן מישהו ראוי יותר נבחר.

תקפותו גלויה באורח אינטואיטיבי, אך הבה נשקול את עניין ההוכחה. הדיון יהיה קל יותר אם נתרגם ארגומנט זה לשפת־הסמלים שלנו כך:

$A \supset B$
$B \supset C$
$C \supset D$
$\sim D$
$A \vee E$
$\therefore E$

כדי להוכיח תקפותו של ארגומנט זה בעזרת לוח אמת, יהיה דרוש לוח אמת של 32 שורות, שכן הוא מכיל חמש טענות פשוטות שונות. אך נוכל להוכיח כי הארגומנט הנתון תקף, אם נגזור את מסקנתו מהקדמותיו בעזרת רצף של ארבעה טיעונים יסודיים תקפים. משתי ההקדמות הראשונות $A \supset B$ ו־$B \supset C$ אנו גוזרים באופן תקף $A \supset C$ בעזרת היקש היפותטי. מ־$A \supset C$ וההקדמה השלישית $C \supset D$ אנו גוזרים באופן תקף $A \supset D$ בעזרת היקש היפותטי נוסף. מ־$A \supset D$ וההקדמה הרביעית $\sim D$ אנו גוזרים באופן תקף $\sim A$ בעזרת מודוס טולנס. ומ־$\sim A$ וההקדמה החמישית $A \vee E$, בעזרת היקש דיסיונקטיבי, אנו גוזרים באופן תקף E, מסקנתו של הארגומנט המקורי. העובדה שהמסקנה יכולה להיגזר מחמש ההקדמות של הארגומנט המקורי, בעזרת ארבעה טיעונים תקפים, מוכיחה שהארגומנט המקורי תקף. כאן דפוסי־הטיעון התקפים היסודיים — היקש היפותטי (H.S.), מודוס טולנס (M.T.), והיקש דיסיונקטיבי (D.S.) — משמשים כללי היסק שלפיהם המסקנות מוסקות או נגזרות באופן תקף מן ההקדמות.

הוכחה צורנית יותר לתקפות ניתנת אם כותבים את ההקדמות והטענות הנובעות מהן בעמודה יחידה, ורושמים בעמודה אחרת, מימין לכל טענה, את "הצדקתו", או את הטעם שנוכל לתת להכללתו בהוכחה. נוח לרשום תחילה את כל ההקדמות ולכתוב את המסקנה קמעה בצד, מופרדת מן ההקדמות בקו אלכסוני. הקו האלכסוני מסמן אוטומטית את כל הטענות שמעל המסקנה כהקדמותיה. אם כל הטענות שבעמודה ממוספרות, ה"הצדקה" לכל טענה יכולה להיכתב במתן מספריהן של הטענות הקודמות שמהן הוסק, יחד עם סימונו המקוצר של כלל ההיסק שלפיו הוא נובע מהן. ההוכחה הצורנית נכתבת כך:

1.	$A \supset B$	
2.	$B \supset C$	
4.	$\sim D$	
5.	$A \vee E\ /\ \therefore E$	
6.	$A \supset C$	1,2, H.S.
7.	$A \supset D$	6,3, H.S.
8.	$\sim A$	7,4, M.T.
9.	E	5,8, D.S.

אנו מגדירים הוכחה צורנית לתקפותו של ארגומנט נתון כרצף טענות שכל אחת מהן — או שהיא הקדמה באותו ארגומנט, או שהיא נובעת

מטענות קודמות לפי טיעון יסודי תקף, וכך שהטענה האחרונה ברצף היא המסקנה של הארגומנט שתקפותו מוכחת.

אנו מגדירים טיעון יסודי תקף ככל טיעון שהינו מקרה הצבה של דפוס טיעון יסודי תקף. יש להדגיש שכל מקרה הצבה של דפוס טיעון יסודי תקף הוא טיעון יסודי תקף. וכך, הטיעון

$$(A \cdot B) \supset [C \equiv (D \vee E)]$$
$$A \cdot B$$
$$\therefore C \equiv (D \vee E)$$

הוא טיעון יסודי תקף, משום שהוא מקרה הצבה של דפוס־הטיעון היסודי התקף מודוס פוננס (M.P.). הואיל והוא מתקבל מן

$$p \supset q$$
$$p$$
$$\therefore q$$

בהצבת $A \cdot B$ במקום p, ו־$C \equiv (D \vee E)$ במקום q, הוא בעל אותה צורה, אף־על־פי שמודוס פוננס איננו הצורה בהא הידיעה של הארגומנט הנתון.

מודוס פוננס הוא אכן דפוס טיעון תקף יסודי מאוד, אולם מהם דפוסי־הטיעון התקפים האחרים שיש לראותם ככללי היסק? אנו מתחילים ברשימה של תשעה כללי היסק בלבד שאפשר להשתמש בהם בבניית הוכחות תקפות צורניות:

כללי ההיסק

1. מודוס פוננס (M.P.)

$$p \supset q$$
$$p$$
$$\therefore q$$

2. מודוס טולנס (M.T.)

$$p \supset q$$
$$\sim q$$
$$\therefore \sim p$$

3. היקש היפותטי (H.S.)

$$p \supset q$$
$$q \supset r$$
$$\therefore p \supset r$$

4. היקש דיסיונקטיבי (D.S.)

$$p \vee q$$
$$\sim p$$
$$\therefore q$$

5. דילמה בונה (C.D.)
$(p \supset q) \cdot (r \supset s)$
$p \lor r$
$\therefore q \lor s$

6. ספיגה (Abs.)
$p \supset q$
$\therefore p \supset (p \cdot q)$

7. פישוט (Simp.)
$p \cdot q$
$\therefore p$

8. קוניונקציה (Conj.)
p
q
$\therefore p \cdot q$

9. הוספה (Add.)
p
$\therefore p \lor q$

תשעת כללי ההיסק האלה תואמים את דפוסי־הטיעון היסודיים אשר תקפותם מאושרת בנקל בעזרת לוחות אמת. השמות שנמנו כאן הם ברובם מסורתיים, והשימוש בסימוניהם המקוצרים מאפשר לערוך את ההוכחות הצורניות תוך כתיבה מינימלית.

תרגילים

I. כל אחד מהביטויים הללו הינו הוכחה צורנית לתקפותו של הארגו־מנט המצויין בו. קבע את ה"הצדקה" לכל שורה שאינה הקדמה:

* .1
1. $A \cdot B$
2. $(A \lor C) \supset D \; / \therefore A \cdot D$
3. A
4. $A \lor C$
5. D
6. $A \cdot D$

.2
1. $(E \lor F) \cdot (G \lor H)$
2. $(E \supset G) \cdot (F \supset H)$
3. $\sim G \; / \therefore H$
4. $E \lor F$
5. $G \lor H$
6. H

.3
1. $I \supset J$
2. $J \supset K$
3. $L \supset M$
4. $I \lor L \; / \therefore K \lor M$
5. $I \supset K$
6. $(I \supset K) \cdot (L \supset M)$
7. $K \lor M$

.4
1. $N \supset O$
2. $(N \cdot O) \supset P$
3. $\sim (N \cdot P) \; / \therefore \sim N$
4. $N \supset (N \cdot O)$
5. $N \supset P$
6. $N \supset (N \cdot P)$
7. $\sim N$

* .5
1. $Q \supset R$
2. $\sim S \supset (T \supset U)$
3. $S \lor (Q \lor T)$
4. $\sim S \; / \therefore R \lor U$
5. $T \supset U$
6. $(Q \supset R) \cdot (T \supset U)$
7. $Q \lor T$
8. $R \lor U$

.6
1. $W \supset X$
2. $(W \supset Y) \supset (Z \lor X)$
3. $(W \cdot X) \supset Y$
4. $\sim Z \; / \therefore X$
5. $W \supset (W \cdot X)$
6. $W \supset Y$
7. $Z \lor X$
8. X

.7
1. $(A \lor B) \supset C$
2. $(C \lor B) \supset [A \supset (D \equiv E)]$
3. $A \cdot D \; / \therefore D \equiv E$
4. A
5. $A \lor B$
6. C
7. $C \lor B$
8. $A \supset (D \equiv E)$
9. $D \equiv E$

.8
1. $F \supset \sim G$
2. $\sim F \supset (H \supset \sim G)$
3. $(\sim I \lor \sim H) \supset \sim\sim G$
4. $\sim I \; / \therefore \sim H$
5. $\sim I \lor \sim H$
6. $\sim\sim G$
7. $\sim F$
8. $H \supset \sim G$
9. $\sim H$

.9
1. $I \supset J$
2. $I \lor (\sim\sim K \cdot \sim\sim\sim J)$
3. $L \supset \sim K$
4. $\sim (I \cdot J) \; / \therefore \sim L \lor \sim J$
5. $I \supset (I \cdot J)$
6. $\sim I$
7. $\sim\sim K \cdot \sim\sim\sim J$
8. $\sim\sim K$
9. $\sim L$
10. $\sim L \lor \sim J$

10.

1. $(L \supset M) \supset (N \equiv O)$
2. $(P \supset \sim Q) \supset (M \equiv \sim Q)$
3. $\{[(P \supset \sim Q) \vee (R \equiv S)] \cdot (N \vee O)\} \supset [(R \equiv S) \supset (L \supset M)]$
4. $(P \supset \sim Q) \vee (R \equiv S)$
5. $N \vee O \;/\; \therefore (M \equiv \sim Q) \vee (N \equiv O)$
6. $[(P \supset \sim Q) \vee (R \equiv S)] \cdot (N \vee O)$
7. $(R \equiv S) \supset (L \supset M)$
8. $(R \equiv S) \supset (N \equiv O)$
9. $[(P \supset \sim Q) \supset (M \equiv \sim Q)] \cdot [(R \equiv S) \supset (N \equiv O)]$
10. $(M \equiv \sim Q) \vee (N \equiv O)$

II. בנה הוכחה צורנית לתקפותו של כל אחד מן הארגומנטים הללו, תוך שימוש בסימני הקיצור המוצעים:

✶ 1. אם או ג׳ורג׳ או הרברט זוכים, הרי שגם ג׳ק וגם קנת מפסידים. ג׳ורג׳ זכה. לכן ג׳ק הפסיד. (G — ג׳ורג׳ זוכה; H — הרברט זוכה; J — ג׳ק מפסיד; K — קנת מפסיד.)

2. אם אדמס מצטרף, הרי שיוקרת המועדון גוברת; ואם בייקר מצטרף, הרי שמצבו הכספי של המועדון יהיה יותר בטוח. או שאדמס או שבייקר מצטרפים. אם יוקרת המועדון גוברת, הרי שבייקר יצטרף; ואם מצבו הכספי של המועדון נעשה יותר בטוח, הרי שווילסון יצטרף. לכן או שבייקר או שווילסון יצטרפו. (A — אדמס מצטרף; I — יוקרת המועדון גוברת; B — בייקר מצטרף; M — מצבו הכספי של המועדון יותר בטוח; W — ווילסון מצטרף.)

3. אם בראון קיבל את השדר, הרי שנסע במטוס; ואם הוא נסע במטוס, הרי שלא יאחר לפגישה. אם המברק היה ממוען לא־נכון, הרי שבראון יאחר לפגישה. או שבראון קיבל את השדר או שהמברק היה ממוען לא־נכון. לכן או שבראון נסע במטוס או שהוא יאחר לפגישה. (K — בראון קיבל את השדר; N — בראון נסע במטוס; I — בראון יאחר לפגישה; M — המברק היה ממוען לא־נכון.)

4. אם נוויל קונה את המגרש, הרי שייבנה בניין־משרדים; ואילו אם פייטון קונה את המגרש, הרי שהמגרש יימכר במהרה שנית. אם ריברס קונה את המגרש, הרי שייבנה בניין־חנויות; ואם ייבנה בניין־חנויות, הרי שתומפסון יציע להחכירו. או נוויל או ריברס יקנו את המגרש. לכן או שייבנה בניין־משרדים או שייבנה בניין־חנויות. (N — נוויל קונה את המגרש; M — ייבנה בניין־משרדים; P — פייטון קונה את המגרש; Q — המגרש יימכר במהרה שנית; R — ריברס קונה את המגרש; H — ייבנה בניין־חנויות; T — תומפסון יציע להחכירו.)

✶ 5. אם הגשם יימשך, הרי שהנהר יגאה. אם הגשם יימשך והנהר יגאה, הרי שהגשר יוצף. אם המשכת הגשם תציף את הגשר, הרי שדרך יחידה איננה מספיקה לעיר. או שדרך יחידה מספיקה לעיר או שמהנדסי התנועה שגו. לכן מהנדסי התנועה שגו. (C — הגשם נמשך; R — הנהר גואה; B — הגשר מוצף; S — דרך יחידה מספיקה לעיר; M — מהנדסי התנועה שגו.)

6. אם יעקובסון ילך לפגישה, הרי שיוגש דו״ח מלא; אולם אם יעקובסון לא ילך לפגישה, הרי שתידרש הצבעה מיוחדת. אם יוגש דו״ח מלא, הרי שתיפתח חקירה. אם הליכתו של יעקובסון לפגישה גוררת הגשתו של דו״ח מלא, והגשתו של דו״ח מלא גוררת פתיחתה של חקירה, הרי או שיעקובסון הולך לפגישה ונפתחת חקירה או שיעקובסון איננו הולך לפגישה ושום חקירה איננה נפתחת. אם יעקובסון ילך לפגישה ותיפתח חקירה, הרי שחברים אחדים יעמדו לדין. אולם אם יעקובסון איננו הולך לפגישה ושום חקירה איננה נפתחת, הרי שהארגון יתפורר עד מהרה. לכן או שחברים אחדים יעמדו לדין או שהארגון יתפורר עד מהרה. (J — יעקובסון הולך לפגישה; D — דו״ח מלא מוגש; E — הצבעה מיוחדת נדרשת; H — נפתחת חקירה; T — חברים אחדים עומדים לדין; M — הארגון מתפורר עד מהרה.)

7. אם אן נוכחת, הרי שבטי נוכחת. אם אן ובטי שתיהן נוכחות, הרי או שקרליין או שדוריס ייבחרו. אם או קרליין או דוריס ייבחרו, הרי שאתל איננה שולטת למעשה במועדון. אם נוכחות אן גוררת שאתל איננה שולטת למעשה במועדון, הרי שפלורנס תהיה הנשיאה החדשה. כך שפלורנס תהיה הנשיאה החדשה. (A — אן נוכחת; B — בטי נוכחת; C קרליין תיבחר; D — דוריס תיבחר; E — אתל שולטת למעשה במועדון; F — פלורנס תהיה הנשיאה החדשה.)

8. אם מר ג׳ונס הוא שכנו הקרוב ביותר של הבלמן, הרי ששכרו השנתי של ג׳ונס נחלק לשלושה בלי שארית. אם שכרו השנתי של ג׳ונס נחלק לשלושה בלי שארית, הרי ש־20,000 לירות נחלקות לשלושה בלי שארית. אולם 20,000 לירות אינן נחלקות לשלושה בלי שארית. אם מר רובינסון הוא שכנו הקרוב ביותר של הבלמן, הרי שמר רובינסון גר במחצית הדרך בין דטרויט ושיקגו. אם מר רובינסון גר בדטרויט, הרי שאין הוא גר במחצית הדרך בין דטרויט ושיקגו. מר רובינסון גר בדטרויט. אם מר ג׳ונס איננו שכנו הקרוב ביותר של הבלמן, הרי או שמר רובינסון או שמר סמית הוא שכנו הקרוב ביותר של הבלמן. לכן מר סמית הוא שכנו הקרוב ביותר של הבלמן. (J — ג׳ונס הוא שכנו הקרוב ביותר של הבלמן; E — שכרו השנתי של ג׳ונס נחלק לשלושה בלי שארית; T — 20,000 לירות נחלקות לשלושה בלי שארית; R — רובינסון הוא שכנו הקרוב ביותר של הבלמן; H — רובינסון גר במחצית הדרך בין דטרויט ושיקגו; D — רובינסון גר בדטרויט; S — סמית הוא שכנו הקרוב ביותר של הבלמן.)

9. אם מר סמית הוא שכנו הקרוב ביותר של הבלמן, הרי שמר סמית גר במחצית הדרך בין דטרויט ושיקגו. אם מר סמית גר במחצית הדרך בין דטרויט ושיקגו, הרי שאין הוא גר בשיקגו. מר סמית הוא שכנו הקרוב ביותר של הבלמן. אם מר רובינסון גר בדטרויט, הרי שאין הוא גר בשיקגו. מר רובינסון גר בדטרויט. מר סמית גר בשיקגו, ולא — או שמר רובינסון או שמר ג׳ונס גרים בשיקגו. אם מר ג׳ונס גר בשיקגו, הרי שהבלמן הוא ג׳ונס. לכן הבלמן הוא ג׳ונס. (S — סמית הוא שכנו הקרוב ביותר של הבלמן; W — סמית גר במחצית הדרך בין דטרויט ושיקגו; L — סמית גר בשיקגו; D — רובינסון גר בדטרויט; I — רובינסון גר בשיקגו; C — ג׳ונס גר בשיקגו; B — הבלמן הוא ג׳ונס.)

10. אם סמית ניצח פעם את המסיק בביליארד, הרי שסמית איננו המסיק. סמית ניצח פעם את המסיק בביליארד. אם הבלמן הוא ג׳ונס הרי שג׳ונס איננו המסיק. הבלמן הוא ג׳ונס. אם סמית איננו המסיק וג׳ונס איננו המסיק, הרי שרובינסון הוא המסיק. אם הבלמן הוא ג׳ונס ורובינסון הוא המסיק, הרי שסמית הוא המפעיל. לכן סמית הוא המפעיל. (O — סמית ניצח פעם את המסיק בביליארד; M — סמית הוא המסיק; B — הבלמן הוא ג׳ונס; N — ג׳ונס הוא המסיק; F — רובינסון הוא המסיק; G — סמית הוא המפעיל.)

ישנם ארגומנטים תקפים רבים הבנויים מפונקציות אמת אשר אי־אפשר להוכיח את תקפותם אם משתמשים רק בתשעת כללי ההיסק שניתנו עד כה. למשל, כדי לבנות הוכחה צורנית לתקפותו של הארגומנט (התקף באופן גלוי)

$$\begin{array}{l} A \supset B \\ C \supset \sim B \\ \therefore A \supset \sim C \end{array}$$

נדרשים כללים נוספים.

בכל טענה מורכבת באמצעות קשרי־אמת, אם רכיב שבתוכה מוחלף בטענה אחרת בעלת אותו ערך אמת, ערך האמת של הטענה המורכבת יישאר בעינו. אולם הטענות המורכבות היחידות המעסיקות אותנו כאן הן טענות המורכבות באמצעות קשרי־אמת. נוכל לקבל איפוא ככלל היסק נוסף את כלל התחליף, המתיר לנו להסיק מכל טענה את תוצאת החלפת כולה או מקצתה בכל טענה אחרת השקולה לוגית לחלק שהוחלף. בהשתמשנו בחוק השלילה הכפולה (D.N.), הטוען כי p שקול לוגית ל־$\sim\sim p$, נוכל להסיק מתוך $A \supset \sim\sim B$ כל אחד מאלה:

$$A \supset B,\ \sim\sim A \supset \sim\sim B,\ \sim\sim(A \supset \sim\sim B),\ A \supset \sim\sim\sim\sim B$$

בדרך התחליף.

כדי להגדיר היטב את הכלל החדש, אנו מונים מספר שקילויות שהן טאוטולוגיות או אמיתיות לוגית, שעימן אפשר להשתמש בו, ושקילויות אלה מהוות את כללי־ההיסק הנוספים שנשתמש בהם כדי להוכיח תקפותם של ארגומנטים מורחבים. אנו מונים אותן בזו אחר זו בעקבות תשעת החוקים הראשונים שהוצגו קודם.

כלל התחליף: כל אחד מן הביטויים השקולים מבחינה כדלהלן יכול להחליף את משנהו כל אימת שהם מופיעים:

10. חוקי דה־מורגאן (De M.):
$$\sim(p \cdot q) \equiv (\sim p \vee \sim q)$$
$$\sim(p \vee q) \equiv (\sim p \cdot \sim q)$$

11. חילוף (Com.):
$$(p \vee q) \equiv (q \vee p)$$
$$(p \cdot q) \equiv (q \cdot p)$$