פתרון תרגיל בית 2 – גאומטריה אנליטית, זהבית צבי

שאלה 1:

נתון בסיס ל- $\mathbb{R}^3$: $B=\left\{\underbrace{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}}_{\vec{v_1}},\underbrace{\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}}_{\vec{v_2}},\underbrace{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}}_{\vec{v_3}}\right\}$. מצאו בעזרת תהליך גרם-שמידט בסיס אורתוגונלי ובסיס אורתונורמלי.

פתרון

שני הוקטורים $\vec{v_1},\vec{v_2}$ אורתוגונלים כיוון ש- $\left\langle\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}\right\rangle=1-4+3=0$

וגם הוקטורים $\vec{v_2},\vec{v_3}$ אורתוגונלים כיוון ש- $\left\langle\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\rangle=1-2+1=0$,

אבל $\vec{v_1},\vec{v_3}$ אינם אורתוגונלים: $\left\langle\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\rangle=1+2+3=6\neq 0$, לכן זה בסיס שאינו אורתוגונלי.

נמצא באמצעות תהליך גרם שמידט וקטור שלישי, האורתוגונלי לזוג הוקטורים $\underbrace{\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}}_{\vec{v_2}},\underbrace{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}}_{\vec{v_3}}$.

ניתן לבחור אחד משני הזוגות של הוקטורים האורתוגונלים. הזוג שנבחר מסיבות חישוב.

$$\overrightarrow{w_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{w_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{w_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|^2} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{w_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \underbrace{\frac{0}{6}}_{=0} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} - \underbrace{\frac{6}{3}}_{=2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

קיבלנו בסיס אורתוגונלי: $B_0 = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{w_1}}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{w_2}}, \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{w_3}} \right\}$.

נשאר לנו לקבל ממנו בסיס אורתונורמלי.

ננרמל את הוקטורים:

$$\vec{u_1}=\frac{\vec{w_1}}{\left\|\vec{w_1}\right\|}=\frac{\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}}{\left\|\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}\right\|}=\frac{\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}}{\sqrt{6}}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}\\-\frac{2}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$$

$$\vec{u_2}=\frac{\vec{w_2}}{\left\|\vec{w_2}\right\|}=\frac{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}}{\left\|\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\|}=\frac{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}}{\sqrt{3}}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$$

$$\vec{u_3}=\frac{\vec{w_3}}{\left\|\vec{w_3}\right\|}=\frac{\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}}{\left\|\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right\|}=\frac{\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}}{\sqrt{2}}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$

קיבלנו בסיס אורתונורמלי $B_1=\left\{\underbrace{\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}\\-\frac{2}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}}_{\vec{u_1}},\underbrace{\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}}_{\vec{u_2}},\underbrace{\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}}_{\vec{u_3}}\right\}$.

<u>הערה חשובה:</u> אם הינו בוחרים את הזוג השני הינו מקבלים בסיס אורתונורמלי אחר וזה גם מתקבל.

<u>שאלה 2</u> :

נגדיר מכפלה פנימית (חדשה ממה שאנחנו מכירים, רק לצורך תרגיל זה בלבד) ב- $\mathbb{R}^3$ באופן הבא :

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \right\rangle = x_1y_1 + \frac{1}{2}x_1y_3 + \frac{1}{2}x_3y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3$$

בדקו האם הבסיס הסטנדרטי הינו אורתונורמלי לפי המכפלה הפנימית החדשה שהגדרנו בתחילת השאלה.

במידה ולא מצאו באמצעותו בסיס אורתונורמלי.

<u>פתרון</u>

הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^3$ הינו :

$$\left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{v}_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{v}_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{v}_3} \right\}$$

<u>נחשב</u> : עבור הוקטורים $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ מקבלים $\begin{matrix} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ y_1 = 0 \\ y_2 = 1 \\ y_3 = 0 \end{matrix}$ ולכן :

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 + \frac{1}{2}\cdot 0 + \frac{1}{2}\cdot 0 + 2\cdot 0 + 0 = 0$$

כלומר , אלו אורתוגונלים תחת המכפלה הפנימית הנתונה.

ועבור $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ נקבל $\begin{matrix}x_1=1\\x_2=0\\x_3=0\\y_1=0\\y_2=0\\y_3=1\end{matrix}$ ולכן:

$$\left\langle\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\rangle=0+\frac{1}{2}\cdot1+\frac{1}{2}\cdot0+2\cdot0+0=\frac{1}{2}\neq0$$

קיבלנו ששני וקטורים אורתוגונלים לכן נעזר בתהליך גרם שמידט למצוא וקטור שלישי שאורתוגונלי לשניהם:

$$\overrightarrow{w_1}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{w_2}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{w_3}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}-\frac{\left\langle\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\rangle}{\left\|\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\|^2}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}-\frac{\left\langle\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\rangle}{\left\|\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\|^2}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{w_3}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}-\frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}\cdot0+\frac{1}{2}\cdot0+2\cdot0+0}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}-\frac{0+\frac{1}{2}\cdot0+\frac{1}{2}\cdot0+2\cdot0+0}{0+\frac{1}{2}\cdot0+\frac{1}{2}\cdot0+2\cdot1+0}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{w_3}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}-\frac{\frac{1}{2}}{1}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}-\underbrace{\frac{0+\frac{1}{2}\cdot0+\frac{1}{2}\cdot0+2\cdot0+0}{0+\frac{1}{2}\cdot0+\frac{1}{2}\cdot0+2\cdot1+0}}_{0}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\0\\1\end{pmatrix}$$

קיבלנו בסיס אורתוגונלי : $\left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{w}_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{w}_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{w}_3} \right\}$.

נשאר לנו לקבל ממנו בסיס אורתונורמלי.

שימו לב יש לחשב את הנורמה לפי המכפלה הפנימית המוגדרת בתרגיל זה ולא לפי המכפלה הסטנדרטית.

$$\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| \underset{\substack{x_1=1 \\ x_2=0 \\ x_3=0}}{=} \sqrt{1+\frac{1}{2}\cdot 0+\frac{1}{2}\cdot 0+2\cdot 0+0} = \sqrt{1} = 1$$

$$\left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| \underset{\substack{x_1=0 \\ x_2=1 \\ x_3=0}}{=} \sqrt{0+\frac{1}{2}\cdot 0+\frac{1}{2}\cdot 0+2\cdot 1+0} = \sqrt{2}$$

$$\left\| \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| \underset{\substack{x_1=-\frac{1}{2} \\ x_2=0 \\ x_3=1}}{=} \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)+2\cdot 0+1} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

לכן נקבל :

$$\vec{u_1}=\frac{\vec{w_1}}{\left\|\vec{w_1}\right\|}=\frac{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}}{\underbrace{\left\|\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\|}_{=1}}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\vec{u_2}=\frac{\vec{w_2}}{\left\|\vec{w_2}\right\|}=\frac{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}}{\left\|\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\|}=\frac{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}}{\sqrt{2}}=\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\end{pmatrix}$$

$$\vec{u_3}=\frac{\vec{w_3}}{\left\|\vec{w_3}\right\|}=\frac{\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\0\\1\end{pmatrix}}{\underbrace{\left\|\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\0\\1\end{pmatrix}\right\|}_{=\frac{1}{2}}}=\frac{\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\0\\1\end{pmatrix}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{3}}\\0\\\frac{2}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$$

וקיבלנו בסיס אורתונורמלי ביחס למכפלה הפנימית הנתונה.

<u>שאלה 3</u>

נתון תת מרחב הבא של $\mathbb{R}^4$:

$$V=Sp\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\3\\-1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\4\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$$

א. מצאו בסיס אורתוגונלי לתת מרחב V.

<u>פתרון</u>

נשים לב כי $\begin{pmatrix}3\\3\\-1\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\4\\0\\0\end{pmatrix}$, לכן יש בקבוצת הוקטורים הנתונה וקטור תלוי בשני הוקטורים האחרים, כיוון שהוא צירוף לינארי (סכום) שלהם. לכן הקבוצה הנתונה תלויה.

אם נתעלם מהוקטור האחרון נקבל בסיס ל- V :

$$B=\left\{\underbrace{\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}}_{\vec{v}_1},\underbrace{\begin{pmatrix}3\\3\\-1\\-1\end{pmatrix}}_{\vec{v}_2}\right\}$$

בסיס זה אינו אורתוגונלי כיוון ש-

$$\left\langle\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\3\\-1\\-1\end{pmatrix}\right\rangle=3+3-1-1=4\neq0$$

לכן נבצע תהליך גרם שמידט להפוך אותו לאורתוגונלי.

$$\overrightarrow{w_1}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{w_2}=\begin{pmatrix}3\\3\\-1\\-1\end{pmatrix}-\frac{\left\langle\begin{pmatrix}3\\3\\-1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\right\rangle}{\left\|\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\right\|^2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{w_2}=\begin{pmatrix}3\\3\\-1\\-1\end{pmatrix}-\underbrace{\frac{4}{4}}_{=1}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\2\\-2\\-2\end{pmatrix}$$

קיבלנו בסיס אורתוגונלי לתת מרחב של $\mathbb{R}^4$:

$$B_0=\left\{\underbrace{\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}}_{\overrightarrow{w_1}},\underbrace{\begin{pmatrix}2\\2\\-2\\-2\end{pmatrix}}_{\overrightarrow{w_2}}\right\}$$

ב. מצאו בסיס אורתונורמלי לתת מרחב V.

<u>פתרון</u>

ננרמל את הבסיס שמצאנו בא' בכדי לקבל בסיס אורתונורמלי :

$$\vec{u_1}=\frac{\vec{w_1}}{\left\|\vec{w_1}\right\|}=\frac{\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}}{\underbrace{\left\|\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\right\|}_{=\sqrt{4}=2}}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$\vec{u_2}=\frac{\vec{w_2}}{\left\|\vec{w_2}\right\|}=\frac{\begin{pmatrix}2\\2\\-2\\-2\end{pmatrix}}{\left\|\begin{pmatrix}2\\2\\-2\\-2\end{pmatrix}\right\|}=\frac{\begin{pmatrix}2\\2\\-2\\-2\end{pmatrix}}{\underbrace{\sqrt{16}}_{4}}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

ג. כתבו צירוף לינארי של הוקטור $\vec{v}=\begin{pmatrix}4\\4\\0\\0\end{pmatrix}$ באמצעות הבסיס שמצאתם בסעיף ב'.

<u>פתרון</u>

עלינו למצוא את α_1 ו- α_2 שמקימות את התנאי של הצירוף הלינארי:

$$\vec{v}=\begin{pmatrix}4\\4\\0\\0\end{pmatrix}=\alpha_1\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}\ ,\ \alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{R}$$

שימו לב שיש לקחת לחישוב זה את הוקטורים <u>המנורמלים</u> שמצאנו כלומר האורתונורמלים לפי ההוכחה שכתבנו במחברת!!

נשתמש בנוסחה שהוכחנו:

$$\alpha_i=\langle\vec{v},\vec{u_i}\rangle \quad \text{עבור} \quad i=1,2$$

ונקבל:

$$\alpha_1=\langle\vec{v},\vec{u_1}\rangle=\left\langle\begin{pmatrix}4\\4\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}\right\rangle=2+2+0+0=4$$

$$\alpha_2=\langle\vec{v},\vec{u_2}\rangle=\left\langle\begin{pmatrix}4\\4\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}\right\rangle=2+2-0-0=4$$

לכן הצירוף הלינארי הוא:

$$\begin{pmatrix}4\\4\\0\\0\end{pmatrix}=4\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}+4\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

שאלה 4

נתונה הקבוצה $\left\{\underbrace{\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}}_{\vec{v}_1},\underbrace{\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}}_{\vec{v}_2}\right\}$.

מצאו בסיס אורתונורמלי ל- $\mathbb{R}^3$ באמצעות קבוצה זו.

פתרון

קבוצת הוקטורים הנתונה היא בת״ל, מכיוון שכל הרכיבים של $\vec{v}_1$ שונים מאפס וב- $\vec{v}_2$ הרכיב האמצעי הוא אפס, ואז הוקטורים אינם כפולה בסקלר אחד של השני.
הקבוצה הנתונה אינה אורתוגונלית כיוון ש-

$$\left\langle\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}\right\rangle=-1+0+4=3\neq 0$$

נבצע תהליך גרם שמידט בכדי להפוך את הקבוצה לאורתוגונלית:

$$\overrightarrow{w_1}=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{w_2}=\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}-\frac{\left\langle\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}\right\rangle}{\left\|\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}\right\|^2}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{w_2}=\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}-\frac{3}{9}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{4}{3}\\-\frac{2}{3}\\\frac{4}{3}\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-4\\-2\\4\end{pmatrix}$$

קיבלנו קבוצה אורתוגונלית : $\left\{\underbrace{\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}}_{\overrightarrow{w_1}},\underbrace{\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-4\\-2\\4\end{pmatrix}}_{\overrightarrow{w_2}}\right\}$

כעת יש לנו שתי דרכים להמשיך את הפתרון :

<u>דרך ראשונה</u> :

נמצא וקטור שלישי האורתוגונלי לשני הוקטורים של הקבוצה האורתוגונלית שמצאנו.

נסמן וקטור כללי $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3$ ונדרוש שיהיה אורתוגונלי לשני הוקטורים שקיבלנו :

$$\left\langle\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}\right\rangle=0\Rightarrow x+2y+2z=0$$

$$\left\langle\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix},\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-4\\-2\\4\end{pmatrix}\right\rangle=0\Rightarrow\frac{1}{3}\left(-4x-2y+4z\right)=0\Big|\cdot(-3)\Rightarrow 4x+2y-4z=0$$

קיבלנו 2 משוואות בשלושה נעלמים.

נחסר את המשוואה הראשונה מהמשוואה השניה ונקבל :

$$3x-6z=0\Rightarrow x=2z$$

בסה"כ יש לנו:

$$\begin{cases}x+2y+2z=0\\ x=2z\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2z+2y+2z=0\Rightarrow 2y+4z=0\Rightarrow y=-2z\\ x=2z\end{cases}$$

$z\in\mathbb{R}$ חופשי. נסמן $z=t$ ונקבל: $x=2t, y=-2t$ ולכן:

$$\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2t\\ -2t\\ t\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}2\\ -2\\ 1\end{pmatrix}$$

לכן קיבלנו וקטור $\begin{pmatrix}2\\ -2\\ 1\end{pmatrix}$ אורתוגונלי לשני הוקטורים האורתוגונלים שמצאנו קודם.

בסה"כ מקבלים קבוצה אורתוגונלית של 3 וקטורים ב-$\mathbb{R}^3$:

$$\left\{\underbrace{\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 2\end{pmatrix}}_{\vec{w_1}},\underbrace{\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-4\\ -2\\ 4\end{pmatrix}}_{\vec{w_2}},\underbrace{\begin{pmatrix}2\\ -2\\ 1\end{pmatrix}}_{\vec{w_3}}\right\}$$

לפי משפט, קבוצה אורתוגונלית שלא מכילה את וקטור האפס היא בת"ל, לכן יש לנו קבוצה אורתוגונלית של 3 וקטורים בת"ל, לכן זה בסיס אורתוגונלי ל-$\mathbb{R}^3$.

ננרמל את הוקטורים בכדי לקבל בסיס אורתונורמלי:

$$\overrightarrow{u_1}=\frac{\overrightarrow{w_1}}{\left\|\overrightarrow{w_1}\right\|}=\frac{\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}}{\underbrace{\left\|\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}\right\|}_{=\sqrt{9}=3}}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{u_2}=\frac{\overrightarrow{w_2}}{\left\|\overrightarrow{w_2}\right\|}=\frac{\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-4\\-2\\4\end{pmatrix}}{\left\|\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-4\\-2\\4\end{pmatrix}\right\|}=\frac{\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-4\\-2\\4\end{pmatrix}}{\frac{1}{3}\underbrace{\sqrt{16+4+16}}_{=6}}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2\\-1\\2\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{u_3}=\frac{\overrightarrow{w_3}}{\left\|\overrightarrow{w_3}\right\|}=\frac{\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}}{\underbrace{\left\|\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}\right\|}_{=\sqrt{9}=3}}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$$

קיבלנו בסיס אורתונורמלי ל- $\mathbb{R}^3$: $\left\{\underbrace{\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}}_{\overrightarrow{u_1}},\underbrace{\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix}}_{\overrightarrow{u_2}},\underbrace{\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}}_{\overrightarrow{u_3}}\right\}$.

<u>דרך שניה</u>:
נמצא וקטור בת"ל בקבוצה האורתוגונלית שמצאנו ולאחר מכן נפעיל תהליך גרם שמידט בכדי להפוך את הקבוצה לאורתוגונלית.

ניקח איזשהו וקטור מהבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^3$ ונבדוק אם מתקבלת קבוצה בת"ל:

למשל, ננסה את הוקטור $\overrightarrow{v_3}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$. הוקטורים $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-4\\-2\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$ אכן בת"ל מכיוון ש-

$$\begin{vmatrix} 1 & -\frac{4}{3} & 0 \\ 2 & -\frac{2}{3} & 0 \\ 2 & \frac{4}{3} & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & -\frac{4}{3} \\ 2 & -\frac{2}{3} \end{vmatrix} = 1\left(-\frac{2}{3}+\frac{8}{3}\right) = 2 \neq 0$$

פיתחנו את הדטרמיננטה לפי העמודה שלישית.

קיבלנו קבוצה בת״ל של 3 וקטורים ב- $\mathbb{R}^3$, לכן היא בסיס.

בבסיס זה שני הוקטורים הראשונים אורתוגונלים והשלישי לא אורתוגונלי, כיוון ש-

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 3 \neq 0$$

נפעיל תהליך גרם-שמידט ונמצא וקטור שלישי, האורתוגונלי לשני הוקטורים הראשונים.

$$\overrightarrow{w_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{w_2} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{w_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\|^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\| \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\|^2} \cdot \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{w_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{9}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{\frac{4}{3}}{\frac{1}{9}\cdot 36} \cdot \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{9}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{9} \\ -\frac{2}{9} \\ \frac{1}{9} \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

קיבלנו בסיס אורתוגונלי:

$$\left\{\underbrace{\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}}_{\vec{w_1}},\underbrace{\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-4\\-2\\4\end{pmatrix}}_{\vec{w_2}},\underbrace{\frac{1}{9}\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}}_{\vec{w_3}}\right\}$$

ננרמל את הוקטורים בכדי לקבל בסיס אורתונורמלי:

$$\vec{u_1}=\frac{\vec{w_1}}{\|\vec{w_1}\|}=\frac{\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}}{\underbrace{\left\|\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}\right\|}_{=\sqrt{9}=3}}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$$

$$\vec{u_2}=\frac{\vec{w_2}}{\|\vec{w_2}\|}=\frac{\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-4\\-2\\4\end{pmatrix}}{\left\|\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-4\\-2\\4\end{pmatrix}\right\|}=\frac{\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-4\\-2\\4\end{pmatrix}}{\frac{1}{3}\underbrace{\sqrt{16+4+16}}_{=6}}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2\\-1\\2\end{pmatrix}$$

$$\vec{u_3}=\frac{\vec{w_3}}{\|\vec{w_3}\|}=\frac{\frac{1}{9}\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}}{\left\|\frac{1}{9}\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}\right\|}=\frac{\frac{1}{9}\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}}{\frac{1}{9}\sqrt{4+4+1}}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$$

קיבלנו $\left\{\underbrace{\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}}_{\vec{u_1}},\underbrace{\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix}}_{\vec{u_2}},\underbrace{\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}}_{\vec{u_3}}\right\}$ בסיס אורתונורמלי ל- $\mathbb{R}^3$.

<u>שימו לב</u>: קיבלנו אותה תשובה בשתי הדרכים.