אינפי 1 ־ תרגול 1 חסמים

19 באוקטובר 2020

1 שדה סדור

שדה סדור הוא שדה עם יחס סדר לינארי. אצלנו לרוב נדבר על $(\mathbb{R}, \leq)$. מתקיים:

- $a \leq b \iff \forall c \in \mathbb{F} : a + c \leq b + c$
- $a \leq b \iff \forall c > 0 : ac \leq bc$

תרגילים:

1. הוכיחו: $0 \leq a \iff -a \leq 0$
פתרון: בכיוון $\Rightarrow$ נשתמש בתכונה הראשונה עם $c = -a$ ונקבל:

$$0 \leq a \Rightarrow 0 + (-a) \leq a + (-a) \iff -a \leq 0$$

הכיוון השני ע"י הוספת a לשני הצדדים.

2. הוכיחו שאם $a \leq b$ וגם $c \leq d$ אז $a + c \leq b + d$. נוסיף c לא"ש הראשון ונקבל $a + c \leq b + c$, נוסיף b לא"ש השני ונקבל $c + b \leq d + b$. וע"י חיילופיות השדה וטרנזיטיביות הסדר נקבל $a + c \leq b + d$.

2 חסמים

ניזכר בהגדרות: תהי $(U, \leq)$ קבוצה סדורה לינארית, $A \subseteq U$. אז:

- $a \in U$ הוא חסם מלעיל של A אם מתקיים: $\forall b \in A : b \leq a$. מסמנים גם $A \leq a$.
- $a \in U$ הוא חסם מלרע של A אם מתקיים: $\forall b \in A : a \leq b$. מסמנים גם $a \leq A$.
- $a \in U$ הוא חסם עליון של A אם הוא הקטן ביותר מבין חסמי המלעיל. כלומר, מתקיים: $A \leq a \wedge (\forall A \leq c : a \leq c)$. מסומן: $\sup(A)$

- $a \in U$ הוא חסם תחתון של A אם הוא הגדול ביותר מבין חסממי המלרע. כלומר, מתקיים: $(a \le A \wedge (\forall c \le A : c \le a)$. מסומן: $\inf(A)$
- $a \in A$ הוא מקסימום של A אם הוא חסם מלעיל השייך לA.
- $a \in A$ הוא מינימום של A אם הוא חסם מלרע השייך לA.

דוגמאות:

- $\sup((5,7]) = 7 = max((5,7])$.
- $\max([5,7))$ לא קיים, $\sup([5,7)) = 7$

משפטים:

- לכל $A \subseteq \mathbb{R}$ חסומה מלרע (מלעיל) יש חסם תחתון (עליון).
- תהי A חסומה מלרע, אז m חסם תחתון של A אם ורק אם: m חסם מלרע ומתקיים

$$\forall \epsilon > 0 : \exists a \in A : a < m + \epsilon$$

תרגילים:

1. תהי $A = \{\frac{1}{n^2} + 2(-1)^n : n \in \mathbb{N}\}$. מצאו $\max, \min, \sup, inf$.
פתרון: בתור התחלה נרשום כמה מאיברי הקבוצה:

$$A = \{-1, 2\frac{1}{4}, -1\frac{8}{9}, 2\frac{1}{16}, \dots\}$$

כעת נוכל לנחש: $\sup(A) = \max(A) = 2\frac{1}{4}$, $inf(A) = -2$, אין מינימום.
הוכחה: כיון ש־ $2\frac{1}{4}$ שייך לקבוצה מספיק להוכיח שהוא חסם מלעיל, ולקבל שהוא מקס' וסופרימום. צ"ל:

$$\forall n : \frac{1}{n^2} + 2(-1)^n \le 2\frac{1}{4}$$

עבור $n = 1$ הדבר ברור., ולכל $n \ge 2$ מתקיים:

$$\frac{1}{n^2} + 2(-1)^n \le \frac{1}{n^2} + 2 \le \frac{1}{4} + 2 = 2\frac{1}{4}$$

כעת נעבור לאינפימום: נראה ש־ -2 חסם מלרע: לכל n:

$$-2 \le \frac{1}{n^2} - 2 \le \frac{1}{n^2} + 2(-1)^n$$

כעת צריך להראות שלכל $\epsilon > 0$ ניתן למצוא איבר בקבוצה a כך ש־ $a < -2 + \epsilon$.
במילים אחרות, צריך למצוא n_0 כך ש־ $\frac{1}{n_0^2} + 2(-1)^{n_0} < -2 + \epsilon$.
כלומר, יהי $\epsilon > 0$. ניקח n_0 להיות הטבעי האי־זוגי הבא מיד אחרי $\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}$, ואז אי השיוויון יתקיים.
אין מינימום כי האינפימום לא שייך ל־A: $\forall n : -2 < -2 + \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n^2} + 2(-1)^n$.

2. נתון $S \subseteq T \subseteq \mathbb{R}$ חסומות מלעיל. מה הקשר בין $\sup(S), \sup(T)$?
טענה: $\sup(S) \leq \sup(T)$.
הוכחה: נתחיל מכך ש־ $\sup(T)$ חסם מלעיל של S: כי לכל $t \in T$ מתקיים $t \leq \sup(T)$, ולכן לכל $s \in S$ מההכלה נקבל $s \in T$ ואז $s \leq \sup(T)$. כעת, מהגדרת $\sup(S)$ הוא קטן או שווה לכל חסם מלעיל של S, ובפרט $\sup(S) \leq \sup(T)$.

3. יהיו $x, y \in \mathbb{R}$. הוכיחו:

$$x \leq y \iff \forall \epsilon > 0 : x < y + \epsilon$$

$\Rightarrow$: כיון ש־ $\epsilon > 0$ נקבל $x < x + \epsilon$, ואז לפי התכונה הראשונה (ומהעובדה $x \leq y$):

$$x < x + \epsilon \leq y + \epsilon$$

$\Leftarrow$: נניח בשלילה $y < x$ אז ההפרש $\delta = x - y > 0$, ולכן (בגלל התנאי שנכון לכל ϵ, ובפרט עבור δ):

$$x < y + \delta = y + (x - y) = x$$

בסתירה.

4. תהיינה $\mathbb{R} \supseteq S, T \neq \emptyset$ קבוצות חסומות מלעיל. נגדיר:

$$S + T = \{s + t : s \in S, t \in T\}$$

הוכיחו:

$$\sup(S + T) = \sup(S) + \sup(T)$$

פתרון: חסם מלעיל: לכל s, t מתקיים:

$$s \leq \sup(S), t \leq \sup(T)$$

ולכן $s + t \leq \sup(S) + \sup(T)$, ולכן $\sup(S) + \sup(T)$ חסם מלעיל של $S + T$.
חסם עליון: יהי $\epsilon > 0$ צריך להראות שקיים $s+t \in S+T$ כך ש־ $\sup(S)+\sup(T) <$

.$s+t+\epsilon$

נשים לב שלכל $\epsilon'>0$ יש $s\in S$ כך ש־ $\sup(S)<s+\epsilon'$, ובפרט עבור $\epsilon'=\frac{\epsilon}{2}$.
כנ"ל, עבורו ניתן למצוא $t\in T$ כך ש־ $\sup(T)<t+\frac{\epsilon}{2}$. ביחד נקבל שמצאנו $s\in S, t\in T$ כך ש:

$$\sup(S)+\sup(T)<(s+\frac{\epsilon}{2})+(t+\frac{\epsilon}{2})=s+t+\epsilon$$

5. תהי $A=\left\{5+\frac{2}{3n}:n\in\mathbb{N}\right\}$. מצאו $\max,\min,\sup,inf$, אם קיימים.
פתרון: נתחיל מלמצוא את הראשונים:

$$A=\left\{5\frac{2}{3},5\frac{1}{3},5\frac{2}{9},\dots\right\}$$

$\max(A)=\sup(A)=5\frac{2}{3}$:

$$\forall n:5+\frac{2}{3n}\leq 5+\frac{2}{3}$$

לכן הוא חסם מלעיל השייך לקבוצה ולכן מקסימום וסופרימום.
$inf(A)=5$: כיון ש־ $\forall n:0<\frac{2}{3n}$ לכן $\forall n:5<5+\frac{2}{3n}$. לכן חסם מלרע.
נראה שלכל $\epsilon>0$ יש n_0 כך ש־ $5+\frac{2}{3n_0}<5+\epsilon$. יהי $\epsilon>0$, נבחר את n_0 להיות $n_0=\left\lceil\frac{2}{3\epsilon}\right\rceil+1$, ואז $\frac{2}{3n_0}<\epsilon$, ולכן $5+\frac{2}{3n_0}<5+\epsilon$.
אין מינימום כי: $5\notin A$ שהרי לכל n טבעי $\frac{2}{3n}>0$ ולכן $5<5+\frac{2}{3n}$.

6. תהי $A=\left\{\frac{2n}{n^2+1}:n\in\mathbb{N}\right\}$. מצאו $\max,\min,\sup,inf$, אם קיימים.
פתרון: איברים ראשונים:

$$A=\{1,\frac{4}{5},\frac{6}{10},\frac{8}{17},\dots\}$$

טענה: $\max(A)=\sup(A)=1$. הוכחה: $1\in A$, ובנוסף לכל n נוכיח:

$$1\geq\frac{2n}{n^2+1}$$

כיון ש־ $n^2+1>0$ הכפלה שומרת כיון א"ש, ולכן נקבל שהטענה מתקיימת אמ"ם $n^2+1\geq 2n$ אמ"ם $(n-1)^2\geq 0$ שאכן נכון.
טענה: $inf(A)=0$. לכל n מתקיים:

$$0<\frac{2n}{n^2+1}$$

כחלוקה של שני חיוביים.
כעת, יהי $\epsilon>0$, נמצא n_0כך ש־ $\frac{2n_0}{n_0^2+1}<\epsilon$. פתיחת אי השיוויון:

$$\epsilon n_0^2-2n_0+\epsilon>0$$

ולכן דרוש

$$n_0 > \frac{2 \pm \sqrt{4(1-\epsilon^2)}}{2\epsilon}$$

כמובן, כיון שהטבעיים לא חסומים מלעיל אז קיים טבעי כזה.