

תרגיל 4

שאלה 1:

הוכיחו שאין סדרה חיובית המתכנסת ל-0 הכי מהר או הכי לאט.

הדרכה: הראו שאם $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ היא סדרה של מספרים חיוביים המקיימת $a_n \rightarrow 0$, אזי קיימות סדרות $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ המקיימות $|b_n| < |a_n| < |c_n|$ אבל $b_n \rightarrow 0$ וגם $c_n \rightarrow 0$.

שאלה 2:

נניח ש- $c \in \mathbb{R}$. $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow c$. נניח ש- $a_n \rightarrow \infty$.

- א. אם $c \neq 0$, האם b_n מתכנסת (גם במובן הרחב)? אם כן, מה ניתן לומר על הגבול? אם לא, מצאו דוגמא נגדית.
- ב. אם $c = 0$, האם b_n חסומה? הוכיחו את תשובתכם (שימו לב: התשובה היא גורפת. כלומר, הוכיחו שהיא חסומה בהכרח, או שהיא לא חסומה בהכרח).
- ג. בסעיף ב', האם b_n מתכנסת (גם במובן הרחב)? אם כן, הוכיחו. אם לא – מצאו דוגמא נגדית.

בהצלחה!