

בחינה סופית בחשבון אינפניטסמלי 2 --- מועד ב' תשע"ג

מרצה: שמעון ברוקס

משך הבחינה: 3 שעות

חומר עזר: מחשבון

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \cos\left(\frac{i}{n}\right)$$

1. א. חשב את הגבול

ב. הוכח או הפרך: אם

$$\int_1^{\infty} |f(x)| dx$$

מתכנס, אזי $f(x)$ חסומה.

2. א. הוכח כי למשוואה

$$\int_0^x \sin^2(t) dt = x$$

קיים פתרון יחיד בקטע $-1 \leq x \leq 1$.

ב. הוכח: אם f היא פונקציה זוגית (דהיינו, מתקיים $f(-x) = f(x)$ לכל x), אזי

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt$$

היא פונקציה אי-זוגית (כלומר, מתקיים $F(-x) = -F(x)$ לכל x).

3.א. חשב את האינטגרל הלא-מסויים

$$\int \frac{\sin^3(x)}{\cos(x)} dx$$

ב. חשב את:

$$\int_0^1 x^3 \left(1 - \frac{x^4}{2}\right)^{800} dx$$

4.א. בדוק התכנסות או התבדרות האינטגרל:

$$\int_0^{\infty} \frac{(x+1)}{x\sqrt{x}} \sin(x) dx$$

ב. הוכח שבהכרח $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^3+1}$ מתכנס לפונקציה רציפה.

5.א. פתח את הפונקציה

$$f(x) = \frac{1}{1+x^4}$$

לטור טיילור סביב $x = 0$.

ב. חשב את האינטגרל

$$\int_0^{1/2} \frac{dx}{1+x^4}$$

בטא את תשובתך כטור אינסופי (אין צורך לחשב את הסכום). האם טור זה

מתכנס? למה?

6.א. מצא את המקסימום והמינימום של הפונקציה $f(x,y) = 9x^2 - y^2$ בתחום

$$x^2 + \frac{y^2}{9} \leq 1$$

האליפסה .

ב. בהינתן שהגבול $x^2 + \frac{y^2}{9} = 1$ מתאר את מסלול התנועה של גוף מסויים

ע"פ הפרמטריזציה

$$x(t) = \cos(t)$$

$$y(t) = 3\sin(t)$$

בטווח $0 \leq t \leq 2\pi$, חשב את הנגזרת $\frac{df}{dt}$ של הפונקציה המרוכבת

$$f(t) = (x(t), y(t))$$

המתקבלת מהפונקציה $f(x,y)$ בסעיף א.

ג. באיזה זמן t משיגה $f(t)$ ערך מקסימלי ומינימלי?