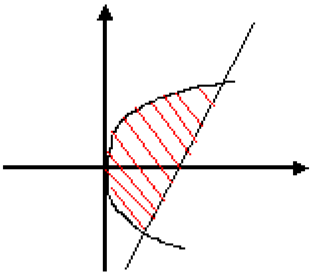
בס"ד

תרגול מס' 5 בחשבון אינפי 2

יישומים של האינטגרל המסוים.

חישוב שטחים.



תרגיל: חשבו את השטח הכלוא על-ידי הפרבולה $y^2 = 4x$ והישר: $y = 2x - 4$.

פתרון: נמצא את נקודות החיתוך:

$$4x^2 - 16x + 16 - 4x = 0 \Leftarrow (2x-4)^2 = 4x$$

$$.(x,y) = \{(4,4),(1,-2)\} \Leftarrow x^2 - 5x + 4 = 0$$

<u>פתרון ע"י פריסה אופקית:</u>

נעזר באלמנט שטח אינפי' בצורת מלבן אופקי הרץ לאורך ציר ה-y:

אורך המלבן הוא: $\underbrace{\frac{1}{2}y + 2}_{x\ line} - \underbrace{\frac{1}{4}y^2}_{x\ parabola}$ רוחב המלבן הוא: dy

והשטח המתקבל הוא: $.S = \int_{-2}^{4}\left(\frac{1}{2}y + 2 - \frac{1}{4}y^2\right)dy = 2y + \frac{y^2}{4} - \frac{y^3}{12}\Big|_{-2}^{4} = 9$

<u>פתרון ע"י פריסה אנכית:</u>

נעזר באלמנט שטח אינפי' בצורת מלבן אנכי הרץ לאורך ציר ה-x:

נחלק את השטח לשניים: $.0 \le x \le 1,\ 1 \le x \le 4$ נסמן: $y_p = y\ parabola,\ y_l = y\ line$

בחלק הראשון אורך המלבן הוא: $.\ 2y_p = 2\sqrt{4x} = 4\sqrt{x}$

בחלק השני אורך המלבן הוא: $.y_p - y_l = 2\sqrt{x} - (2x-4)$

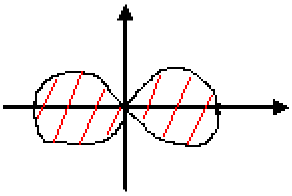
בשני החלקים רוחב המלבן הוא dx. נקבל:

$$S_1 = \int_0^1 4\sqrt{x}dx = 4\cdot\frac{2}{3}x^{3/2}\Big|_0^1 = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$$

$$S_2 = \int_1^4\left(4 + 2\sqrt{x} - 2x\right)dx = 4x\Big|_1^4 + 2\cdot\frac{2}{3}x^{3/2}\Big|_1^4 - x^2\Big|_1^4 = 4\cdot 3 + \frac{4}{3}\cdot(8-1) - (16-1) = 6\frac{1}{3}$$

ובסה"כ: $.S = S_1 + s_2 = 9$

תרגיל: חשב את השטח הכלוא בעקומה: $y^2 = x^2 - x^4$.



פתרון: העקומה היא סימטרית ביחס לשני הצירים (החזקות זוגיות),

ולכן מספיק לחשב את השטח ברביע הראשון ולהכפיל בארבע:

<u>בפריסה אנכית:</u>

ניעזר באלמנט שטח אינפי' בצורת מלבן אנכי הרץ

לאורך ציר ה-x. אורך המלבן הוא: $y = \sqrt{x^2 - x^4} = x\sqrt{1-x^2}$, ורוחבו: dx.

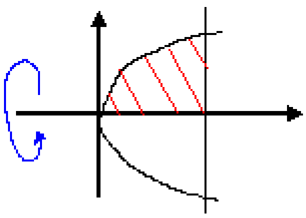
נקודות החיתוך עם ציר ה-x: $x^2\left(1-x^2\right) = 0 \Leftarrow x = \pm 1, 0$ והשטח המתקבל:

$$S = 4\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx = 4\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)\left(1-x^2\right)^{3/2}\Big|_0^1 = -\frac{4}{3}(0-1) = \frac{4}{3}.$$

נפח של גופי סיבוב.

בחישוב נפחים נפרוס את הנפח למרכיבי נפח אינפי'. במקרה של גופי סיבוב ניתן לקחת את אלמנט הנפח כדיסקה ברוחב אינפי'.

תרגיל: חשב את הנפח הנוצר ע"י סיבוב השטח ברביע הראשון הכלוא בין $y^2 = 8x$ והישר $x = 2$ סביב ציר ה-x.



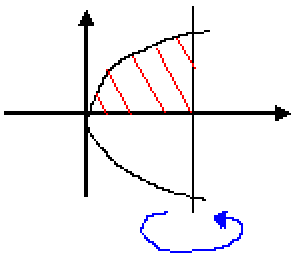
פתרון: בפריסה אנכית: נעזר באלמנט נפח אינפי' בצורת

דיסקה הרץ לאורך ציר ה-x. שטח הדיסקה: $\pi y^2 = 8\pi x$ ורוחבו: dx.

הנפח המתקבל:

$$V = \int_0^2 8\pi x\cdot dx = 4\pi\, x^2\Big|_0^2 = 16\pi.$$

תרגיל: חשב את הנפח הנוצר ע"י סיבוב השטח הכלוא בין $y^2 = 8x$ והישר $x = 2$ סביב $x = 2$.



פתרון: מטעמי סימטריה נחשב את הנפח עבור $y > 0$ ונכפיל ב-2.

נעזר באלמנט נפח של דיסקה אופקית. נקודות החיתוך של הפרבולה עם

הישר הן: $y^2 = 16 \Rightarrow y = \pm 4$.

שטח הדיסקה: πr^2 כאשר $r = 2 - x$. רוחבה הוא dy. הנפח המתקבל

הוא: $V = 2\int_0^4 \pi\left(2 - \frac{y^2}{8}\right)^2 dy = \ldots = \frac{256\pi}{15}$.

אורך של עקום.

תהא $f(x)$ פונקציה גזירה ברציפות בקטע $[a,b]$. אורך הקשת של f מעל $[a,b]$ נתון ע"י:

$$L=\int_a^b\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx\,.$$

תרגיל: חשב את אורך העקום $y=x^{3/2}$ מ- $x=0$ ל- $x=5$.

פתרון: נגזור: $\frac{dy}{dx}(x)=\frac{3}{2}x^{1/2}$ ונקבל: $L=\int_0^5\sqrt{1+\frac{9}{4}x}\,dx=\frac{8}{27}\left(1+\frac{9}{4}x\right)^{3/2}\Big|_0^5=\frac{335}{27}$.

תרגיל: חשב את אורך עקום הפונקציה: $f(x)=\ln x$ בין $x=1$ ל- $x=2$.

פתרון: כיוון ש: $f(x)=\ln x$ גזירה ברציפות בקטע $[1,2]$ נקבל: $L=\int_1^2\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\,dx=\int_1^2\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}dx$.

ניעזר בהצבה: $t=\sqrt{x^2+1}$ ונקבל: $x=\sqrt{t^2-1}\Rightarrow dx=\frac{t}{\sqrt{t^2-1}}dt$. אם כן:

$$\int\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}dx=\int\frac{t^2}{t^2-1}dt=\int\left(1+\frac{1}{t^2-1}\right)dt=t+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C=\sqrt{x^2+1}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+1}+1}\right|+C$$

ומכאן עפ"י נוסחת ניוטון לייבניץ:

$$L=\sqrt{x^2+1}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+1}+1}\right|\Bigg|_1^2=\sqrt{5}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}\right|-\sqrt{2}-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right|.$$

שטח פנים של גוף סיבוב.

אם הגוף מתקבל ע"י סיבוב הפונקציה סביב ציר ה- x, השטח הכולל הוא גבול סכום שטחי הטבעות:

$$S=\int_a^b dS=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx\,.$$

דוגמה: נתחיל עם המקרה הפשוט ביותר: העקום הוא פונקציה קבועה: $f(x)=R$ בקטע $[a,b]$.

כאן $dl=dx$, ו- $dS=2\pi R dx$ לפיכך שטח המעטפת של גליל הוא: $2\pi R\int_a^b dx=2\pi R(b-a)$.

דוגמה: חשב שטח פנים של חרוט בגובה H ובסיסו הוא מעגל ברדיוס R (בלי הבסיס).

ניתן לקבל חרוט כזה ע"י סיבוב הפונקציה: $f(x)=\frac{R}{H}x$ בקטע $[0,H]$ סביב ציר ה- x.

נקבל: $dl=\sqrt{1+\left(\frac{R}{H}\right)^2}\,dx$ ולפיכך: $dS=2\pi\frac{R}{H}x\sqrt{1+\left(\frac{R}{H}\right)^2}\,dx$. אם כן סה"כ השטח הוא:

$$S=\int_0^H dS=2\pi\frac{R}{H}\sqrt{1+\left(\frac{R}{H}\right)^2}\int_0^H x\,dx=\pi\frac{R}{H}\sqrt{1+\left(\frac{R}{H}\right)^2}H^2=\pi R\sqrt{H^2+R^2}.$$

הערה: באופן דומה ניתן להגיע לנוסחה של שטח משטח הנוצר מסיבוב של עקום סביב ציר ה- y.

שיטות נומריות לחישוב בקירוב של האינטגרל המסוים

חישוב אינטגרל מסוים בקירוב ע"י פיתוח טיילור עם שארית.

תרגיל: חשב ברמת דיוק של אלפית את הערך: $\int_0^1\frac{\sin t}{t}dt$.

פתרון: נשים לב כי לפונקציה $\frac{\sin x}{x}$ אין פונקציה קדומה אלמנטרית.

לכן נוסחת ניוטון-לייבניץ אינה אפשרית כאן.

ניעזר בפיתוח מקלורן: $\frac{\sin t}{t}=1-\frac{t^2}{3!}+\frac{t^4}{5!}-\ldots+\frac{R_n^{\sin t}(t)}{t}$

באשר: $\left|\frac{R_n^{\sin t}(t)}{t}\right|=\left|\frac{\sin^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}t^n\right|\le\frac{t^n}{(n+1)!}$.

מתוך תכונת הליניאריות של האינטגרל המסוים נוכל לבצע אינטגרציה של כל מחובר ולהסיק כי:

$$\int_0^1\frac{\sin t}{t}dt=1-\frac{1}{3\cdot3!}+\frac{1}{5\cdot5!}-\ldots+\int_0^1\frac{R_n^{\sin t}(t)}{t}dt.$$

אם נסיים את החישוב אחרי n איברים, עפ"י תכונת אי-השוויון המשולש האינטגרלי נקבל רמת דיוק של:

$$\left|\int_0^1\frac{R_n^{\sin t}(t)}{t}dt\right|\le\int_0^1\left|\frac{R_n^{\sin t}(t)}{t}\right|dt\le\int_0^1\frac{t^n}{(n+1)!}dt=\frac{1}{(n+1)\cdot(n+1)!}.$$

עבור $n=5$ נקבל שגודל זה הוא קטן מאלפית. לכן: $\int_0^1\frac{\sin t}{t}dt\approx1-\frac{1}{3\cdot3!}+\frac{1}{5\cdot5!}=0.9461$.

(התשובה האמיתית היא בקירוב: 0.94608).

שיטת המלבנים:

תהא $f(x)$ פונקציה גזירה ב-$[a,b]$. נרצה לחשב בקירוב את: $\int_a^b f(x)dx$.

לצורך כך נחלק את הקטע $[a,b]$ ל-n תתי-קטעים שווים באורכם: $\Delta x_i = \frac{1}{n}$: $\forall 1 \le i \le n$.

נבנה עפ"י חלוקה זו שני סכומים:

סכום אחד בו נבחר את גובה המלבן בכל תת-קטע להיות בקצה השמאלי של תת-הקטע וסכום אחר בו נבחר את קצה הקטע הימני.

בשיטה זו השגיאה ביחס לסכום הראשון נאמדת ע"י: $E_n \le \frac{(b-a)^2}{n} \cdot \max_{x\in[a,b]} |f'(x)|$.

דוגמה: נחשב שוב את: $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$ (נגדיר $f(0)=1$ כדי שהפונקציה תהיה רציפה בקטע):

נחלק את הקטע $[0,1]$ ל-10 תתי-קטעים שווים באורכם: $\Delta x_i = 0.1$. נקבל:

$$\sigma_1(T) = \sum_{i=1}^{10} f(i-1) = 1 + \frac{\sin 0.1}{0.1} + \frac{\sin 0.2}{0.2} + ... + \frac{\sin 0.9}{0.9} = 0.953759$$

$$\sigma_2(T) = \sum_{i=1}^{10} f(i) = \frac{\sin 0.1}{0.1} + \frac{\sin 0.2}{0.2} + ... + \frac{\sin 1}{1} = 0.853759$$

$$\frac{\sigma_1(T) + \sigma_2(T)}{2} = 0.903759$$

נחשב את הנגזרת: $f'(x) = \frac{\cos}{x} - \frac{\sin x}{x^2}$ ובאמצעות לופיטל נקבל: $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = 0$.

הפונקציה יורדת בקטע וקמורה כלפי מטה. לפיכך: $\max_{x\in[0,1]} |f'(x)| = |f'(1)| = |\cos(1) - \sin(1)| = 0.3$.

מכאן: $E_{10} \le 0.1 \cdot 0.3 = 0.03$ ואכן: $0.953759 - 0.94608 \approx 0.0076 < 0.03$.