(1) 5.01.14
אליצה פוקס
הרצאה 11

פרק 3: אופרטורים לינאריים

דוגמאות:
על מרחב l^2:

$$l^2 = \{\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) : \sum |x_i|^2 < \infty\}$$
$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum |x_i|^2}$$

הזזה ימינה: $(\sigma(x))_0 = 0$ $\quad (\sigma(x))_i = x_{i-1}$ חח"ע

$$(x_1, x_2, x_3, \dots) \longrightarrow (0, x_1, x_2, \dots)$$

הזזה שמאלה: $(\tau x)_i = x_{i+1}$ על

$$(x_1, x_2, x_3, \dots) \longrightarrow (x_2, x_3, \dots)$$

הזזה של סדרות אינסופיות לשני הכיוונים: $l_2(\mathbb{Z}) = \{(x_i)_{i\in\mathbb{Z}} : \sum |x_i|^2 < \infty\}$

τ ו σ חח"ע ועל

• $\|\sigma\| = \|\tau\| = 1$

$\sup_{\|x\|=1} \|\sigma x\|$ כאשר $\|\sigma x\| = \|x\|$

בצורה דומה, $\|\tau x\| \le \|x\|$

וניתן למצוא x-ים עבורם $\|\tau x\| = \|x\|$. למשל $(0,1,0,0,\dots) \xrightarrow{\tau} (1,0,0,\dots)$

על $\mathbb{R}^n$ ניתן להגדיר בצורה ציקלית: $(x_1, x_2, \dots, x_n) \leftarrow (x_2, x_3, \dots, x_n, x_1)$

כל פרמוטציה סופית על הקואורדינטות ניתנת לכתיבה כאופרטור לינארי מנורמה 1.
במקרה הסוף מימדי, זוהי דוגמא פרטית [illegible] עבור.

כפל נקודתי: $\underline{x} = (x_i) \xrightarrow{\alpha} (\alpha_i x_i)$

אם $\forall i \ |\alpha_i| < M$ אז זהו אופרטור חסום עם נורמה $\le M$

לינאריות: $\underline{\alpha}(x+y) = \underline{\alpha}(x) + \underline{\alpha} y$

$\underline{\alpha}(\lambda x) = \lambda \underline{\alpha}(x)$

דוג: $L^2[[0,1]]$

$f \xrightarrow{M_g} f \cdot g$ $\quad g$ חסומה

דוג: אם $(x_i) \xrightarrow{M_\alpha} \alpha_i x_i$ ו $\{\alpha_i\}$ לא חסומה אז האופרטור M_α לא חסום

ולכן ~~[illegible]~~, יש וקטור $y = (y_i) \in l^2$ כך ש $M_\alpha(y) \notin l^2$

[ולכן לא רציף
ואין להגדירו על
כל המרחב l^2]

ניתן לבחור סדרה n_k כך ש $\{\alpha_{n_k}\} > 2^k$ ואז נקבל:

$$y_i = \begin{cases} 0 & i \ne n_k \\ \frac{1}{2^k} & i = n_k \end{cases}$$

אם הסדרה בה מכפילים היא חסומה,
אז גם תוצאת האופרטור חסומה.

(2) 5.01.14

עליזה פוג
הרצאה 14

אופרטורים לינאריים מהמיון 1 : $A: B \to C$ פונקציונלים לינאריים

$L^2[[0,1]]$ כל פונקציונל חסום מהצורה $f \to \int_0^1 f\cdot g \, d\mu$ כאשר $g \in L^2$.

$(a_i) \to \sum a_i b_i$ כאשר $b_i \in L^2$

מכפלה פנימית

מרחב וקטורי E (מרוכב).

מכפלה פנימית היא העתקה $\langle \cdot , \cdot \rangle : E\times E \longrightarrow \mathbb{C}$ המקיימת* לכל $x,y \in E$

ו- $\alpha,\beta \in \mathbb{C}$ את התכונות הבאות:

1. $\langle x,y\rangle = \overline{\langle y,x\rangle}$
2. $\langle \alpha x + \beta y , z\rangle = \alpha\langle x,z\rangle + \beta\langle y,z\rangle$
3. $\langle x,x\rangle \geq 0$
4. $\langle x,x\rangle = 0 \Rightarrow x=0$

מסקנה: $\langle x, \alpha y\rangle = \bar{\alpha}\langle x,y\rangle$

דוג': 1. ב- $\mathbb{C}^n$ $\langle \underline{x},\underline{y}\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \bar{y}_i$

2. ב- ℓ^2 $\langle \underline{x},\underline{y}\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \bar{y}_i$

3. $C[[0,1]]$ $\langle f,g\rangle = \int_0^1 f\bar{g}\, d\mu$

4. $L^2[[0,1]]$, $\langle f,g\rangle = \int_0^1 f\bar{g}\, d\mu$

בהינתן מכפלה פנימית, אפשר להגדיר נורמה: $\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle} \geq 0$

נבדוק את תכונות הנורמה:

- $\|x\| \geq 0$
- $\|x\| = 0 \Rightarrow x=\underline{0}$
- $\|\lambda x\|^2 = \langle \lambda x, \lambda x\rangle = |\lambda|^2\|x\|$

אי שוויון המשולש ינבע מאי שוויון קושי שוורץ (נוכיח עכשיו)

(3) 5.10.14
אנליזה פונ'
הרצאה 1

<u>אי שוויון קושי שוורץ:</u> $|\langle x,y\rangle| \le \|x\|\cdot\|y\|$

[מקרה פרטי: $\Rightarrow \left|\int f\cdot g\right| \le \int|f|\cdot\int|g|$]

ושוויון מתקיים עבור $x=\lambda y$ עבור λ כלשהו.

<u>הוכחה:</u>
$$0 \le \langle x+\alpha y, x+\alpha y\rangle = \langle x,x\rangle + |\alpha|^2\langle y,y\rangle + \alpha\langle y,x\rangle + \bar{\alpha}\langle x,y\rangle$$

כעת נבחר: $\alpha = -\frac{\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle}$:

$$0 \le \langle x+\alpha y, x+\alpha y\rangle = \langle x,x\rangle + \frac{|\langle x,y\rangle|^2}{|\langle y,y\rangle|^{\cancel{2}}}\cdot\cancel{\langle y,y\rangle} - \frac{\langle x,y\rangle\langle y,x\rangle}{\langle y,y\rangle} - \frac{\langle y,x\rangle\cdot\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle} \quad /\cdot\|y\|^2$$

$$0 \le \|x\|^2\cdot\|y\|^2 + |\langle x,y\rangle|^2 - 2|\langle x,y\rangle|^2 = \|x\|^2\|y\|^2 - |\langle x,y\rangle|^2$$

<u>הוכחת אי שוויון המשולש:</u> $\|x+y\| \le \|x\|+\|y\|$

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \langle x,x\rangle + \langle y,y\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle$$
$$\underset{\text{קושי שורץ}}{\le} \|x\|^2+\|y\|^2+2\|x\|\|y\| = (\|x\|+\|y\|)^2.$$

<u>מסקנה:</u> $\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$ נורמה.

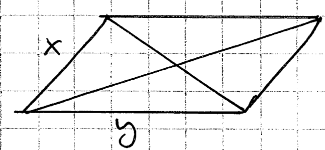
<u>שאלה:</u> האם כל נורמה נובעת ממכפלה פנימית?

<u>משפט:</u> <u>שוויון המקבילית:</u>

בנורמה שנובעת ממכפלה פנימית מתקיים:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2+\|y\|^2)$$

סכום ריבועי האלכסונים
שווה לסכום ריבועי הצלעות



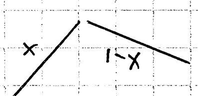
$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2 = \langle x+y,x+y\rangle + \langle x-y,x-y\rangle = 2\langle x,x\rangle + 2\langle y,y\rangle + \cancel{\langle x,y\rangle} + \cancel{\langle y,x\rangle} - \cancel{\langle x,y\rangle} - \cancel{\langle y,x\rangle}$$
$$= 2(\|x\|^2+\|y\|^2)$$

$\Leftarrow$ מרחב עם נורמה שנובעת ממכפלה פנימית נקרא מרחב מכפלה פנימית.

<u>טענה:</u> $C[0,1]$ עם נורמת $\|\cdot\|_{sup}$ הוא לא מרחב מכפלה פנימית

<u>הערה:</u> מרחב נורמי מקיים את תנאי המקבילית אז הוא מרחב מכפלה פנימית.
כלומר הנורמה נובעת ממכפלה פנימית.

כי:



$x+1-x=1$

$\|x\|_{sup}=1$

$\|1-x\|_{sup}=1$

$\|1\|=1$

$\|1-2x\|=1$

$1^2+1^2 \ne 2(1^2+1^2)$

(4) 5.01.14

אולגה פיד
הרצאה 4

• x ו-y נקראים אורתוגונליים (מאונכים) אם $\langle x,y\rangle=0$

* אם x,y לא מאונכים ניתן להתייחס ל $\cos\theta=\langle x,y\rangle$. θ - הזווית בין x ל-y

• משפט פיתגורס: אם x ו-y מאונכים אז $\|x+y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2$

$$\|x+y\|^2=\langle x+y,x+y\rangle=\langle x,x\rangle+\underbrace{\langle x,y\rangle}_{0}+\underbrace{\langle y,x\rangle}_{0}+\langle y,y\rangle$$

סימון: אם $\langle x,y\rangle=0$ נסמן $x\perp y$

<u>הגדרה:</u> מרחב מכפלה פנימית שלם נקרא <u>מרחב הילברט</u>

<u>דוגמאות:</u> ℓ^2 (נספחת) , $L^2[[0,1]]$

$$\langle \underline{a},\underline{b}\rangle=\sum a_i\bar{b}_i \qquad \langle f,g\rangle=\int_0^1 f\bar{g}\,d\mu$$

תזכורת: סדרת וקטורים $x_1,\dots,x_n$ נקראת בלתי תלויה לינארית אם

$$\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\dots+\alpha_nx_n=0 \iff \alpha_1=\alpha_2=\dots=\alpha_n$$

אחרת הם נקראים תלויים לינארית.

2. קבוצת וקטורים $\{x_i\}$ נקראת פורשת אם כל $y\in E$ ניתן לכתוב בתור $y=\sum a_ix_i$.

קבוצה פורשת בלתי תלויה נקראת בסיס.

קבוצת וקטורים $\{x_i\}$ נקראת אורתוגונלית אם $x_i\perp x_j\ \forall i\neq j$

שימו לב שאם $y\perp x_1\dots x_k$ אז $y\perp\sum_{j=1}^{k}\alpha_jx_j \Leftarrow \langle y,\sum a_ix_i\rangle=\sum\bar{a}_j\underbrace{\langle y,x\rangle}_{0}=0$

<u>טענה:</u> קבוצת וקטורים אורתוגונלית היא בלתי תלויה לינארית

<u>הוכחה:</u> נניח $\sum\alpha_ix_i=0$

$$0=\langle\sum\alpha_ix_i,\sum\alpha_ix_i\rangle=\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i|^2\langle x_i,x_i\rangle+\sum_{i\neq j}\alpha_i\bar{\alpha}_j\langle x_i,x_j\rangle$$

$$0=\langle\sum\alpha_ix_i,\sum\alpha_ix_i\rangle=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_i\bar{\alpha}_j\langle x_i,x_j\rangle$$

$$=\sum_{\substack{i=1\\i=j}}^{n}\alpha_i\bar{\alpha}_i\langle x_i,x_i\rangle+\sum_{i\neq j}\alpha_i\bar{\alpha}_j\underbrace{\langle x_i,x_j\rangle}_{0}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i|^2\underbrace{\|x_i\|^2}_{\geq 0}=0$$

(סכום של גורמים חיוביים - $\|\ \|^2$, ולכן המקדמים α_i חייבים להיות אפס)

$$\Rightarrow \alpha_i=0\ \forall i$$

(5) 05.01.14
אנליזה פונ'
הרצאה א

קבוצת וקטורים אורתוגונלים שכולם נורמה 1 כל אחד נקראת <u>מערכת אורתונורמלית</u>

<u>בסיס אורתונורמלי:</u> הוא סדרת וקטורים $\{x_i\}$ כך ש $x_i \perp x_j$ $i \neq j$,
$\forall i$ $\|x_i\|=1$, וכל וקטור $y \in H$ ניתן לרשום כ $y=\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$
(וקטור מתכנס בנורמה)

- אם קיים בסיס סופי אז המרחב נקרא ממימד סופי, (ואז לכל הבסיסים אותו גודל והגודל הנ"ל נקרא המימד).
אחרת המימד נקרא אינסופי.

מרחב נקרא ספרבילי אם קיימת בו קבוצה בת מניה צפופה.

<u>טענה:</u> במרחב הילברט ספרבילי קיים בסיס אורתונורמלי

$L^2[[0,1]]$, ℓ^2 - מרחבים ספרביליים

(את הוקטורים התלויים אפשר לזרוק..)

<u>תהליך גרם-שמידט:</u> תהליך שלוקח סדרת וקטורים בלתי תלויה ויוצר ממנה סדרה אורתונורמלית

$x_1, x_2, \ldots$

$$y_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|}$$

$$\langle x_2 - \langle x_2, y_1\rangle y_1, y_1\rangle = \langle x_2, y_1\rangle - \langle x_2, y_1\rangle \underbrace{\|y_1\|^2}_{1} = 0$$

ולכן ניקח: $y_2 = \dfrac{x_2 - \langle x_2, y_1\rangle y_1}{\|x_2 - \langle x_2, y_1\rangle y_1\|}$

$\vdots$

באופן כללי, מקבלים את y_n ע"י כך שמפחיתים מ-x_n את ההטלה שלו על המרחב שנפרש ע"י $y_1 .. y_{n-1}$ ומנרמלים.

- לכל n: $span(x_1..x_n) = span(y_1...y_n)$ ההטלה לא משנה את ה-span
- יכולים להיות הרבה מאוד בסיסים אורתונורמליים לאותו מרחב (כמו מטריצה)

<u>דוגמאות:</u> 1. הבסיס הסטנדרטי של ℓ^2. $e_i = (0,0...1,0,0)$ $\{e_i\}$
מקום i

2. בסיס פוריה $\varphi_n(x) = \dfrac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}}$ $n \in R$ בסיס ל $L^2[(-\pi,\pi)]$

$$\langle \varphi_m, \varphi_n\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{inx} \cdot e^{imx}}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)x} dx \underset{m\neq n}{=} 0$$

$$\langle \varphi_n, \varphi_n\rangle = \frac{1}{2\pi}\int 1\, dx = 1$$

3. פולינומים אורתוגונליים $L^2([-1,1])$:

$P_0(x) = 1$

$P_n(x) = \dfrac{1}{2^n \cdot n!} \cdot \dfrac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$ לג'נדר

פולינומי צ'בישב: $Q_n(\cos\theta) = \cos n\theta$

05.01.14
אנליזה פו'
הרצאה 11

משפט פיתגורס: אם $\{x_i\}$ בא"נ אז $\|\sum_{i=1}^{\infty} x_i\|^2=\sum_{i=1}^{\infty}\|x_i\|^2$

(ללא הוכחה)

הכללה: שוויון בכל $x_1 \dots x_n$ וקטורים אורתונורמליים.

אז לכל $x\in H$:

$$\|x-\sum_{k=1}^{n}\langle x,x_k\rangle x_k\|^2=\|x\|^2-\sum_{i=1}^{n}|\langle x,x_k\rangle|^2$$

הוכחה:

$$\langle x-\sum_{k=1}^{n}\langle x,x_k\rangle x_k\ ,\ x-\sum_{k=1}^{n}\langle x,x_k\rangle x_k\rangle=\|x\|^2-\langle x,\sum_{k=1}^{n}\langle x,x_k\rangle x_k\rangle-\langle\sum_{k=1}^{n}\langle x,x_k\rangle x_k,x\rangle$$

$$+\langle\sum\langle x,x_k\rangle x_k,\sum\langle x,x_k\rangle x_k\rangle$$

$$=\|x\|^2-\sum_{k=1}^{n}\langle x,x_k\rangle\langle x_k,x\rangle-\sum\langle\overline{x,x_k}\rangle\langle x,x_k\rangle+\sum\langle x,x_k\rangle\langle x_k,x\rangle$$

$$=\|x\|^2-\sum|\langle x,x_k\rangle|^2$$

טענה: x_i בסיס אורתונורמלי: $\|\sum\alpha_i x_i\|^2=\sum|\alpha_i|^2$

[$i\neq j \Rightarrow$ המכפלה היא 0
$i=j \Rightarrow$ המכפלה היא 1
מכפלה פנימית של הוקטור עם הצמוד שלו]

מסקנה: אם x_i בסיס אורתונורמלי אז יש דרך יחידה לרשום את x כ:

$x=\sum\alpha_i x_i\ ,\ \alpha_i=\langle x,x_i\rangle$