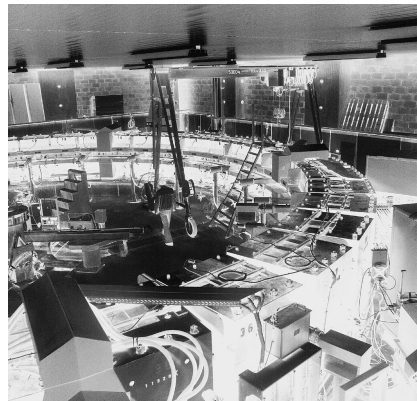


מבוא לפיזיקה מודרנית
תורת היחסות הפרטית

מדידות נוספות של התארכות הזמן

חלקיקים במאיץ

תארנו את התארכות הזמן כפי שנמדדה עבור מיואונים קוסמיים בניסוי של רוסי והול. ניסוי מדויקים יותר לאימות התארכות הזמן נעשה במאיץ במעבדה CERN בשווייץ בשנים 1974-1977 (Bailey *et. al.*, Nature 268). הניסוי נערך במאיץ מעגלי עם מיואונים שעבורם $\gamma=29.33$:



המיואונים נמצאים בתאוצה מעגלית של כ- 10^{19} m/s^2 , כך שאינם במערכת אינרציאלית. אך ניתן בכל רגע אינפיניטסימלי להתייחס אל המיואון כנמצא במערכת אינרציאלית, ולכן במהלך קטע זמן קצר זה, צריכה להתקיים התארכות הזמן, כלומר, הפרש הזמן בין שני ארועים שמתרחשים במערכת המיואון ארוך יותר עבור צופה במערכת המעבדה: $dt' = \gamma dt$.

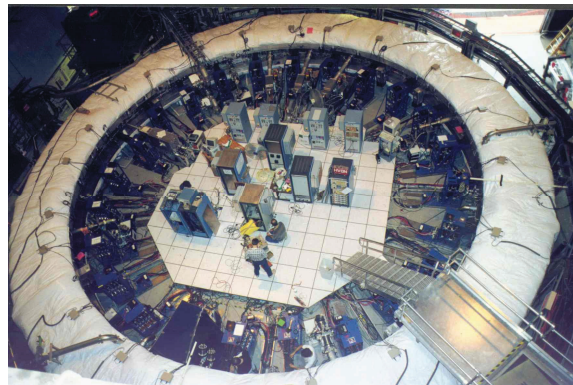
לאחר רגע אינפיניטסימלי נוסף, המיואון נמצא במערכת אחרת (כי הוא בתאוצה מעגלית), אבל מערכת זו נעה באותה המהירות ביחס למעבדה כמו המערכת הראשונה, כך שמתקיימת בדיוק

אותה התארכות הזמן. לכן סך כל התארכויות הזמן הוא $\Delta t' = \int_0^{\Delta t'} dt' = \int_0^{\Delta t} \gamma dt = \gamma \Delta t$

כאשר בשוויון האחרון השתמשנו בכך שהמהירות קבועה עבור כל המערכות דרכן "עובר" המיואון.

הניסוי מצא שהתארכות הזמן מתקיימת כצפוי, עד כדי דיוק הניסוי של 0.1%.

בימים אלה מתרחש ניסוי מדויק יותר במעבדה Brookhaven בארה"ב. הגנה המאיץ שלו:



שעונים אטומיים

ב-1962, Hafele and Keating (Science 177, 168) השוו את הזמן שקרא שעון אטומי נייד לאלה של שעונים על מטוס שטס מזרחה ועל מטוס שטס מערבה. המטרה העיקרית של הניסוי היתה למדוד את התארכות הזמן שחווה תורת היחסות הכללית בשל הפוטנציאל הכבידתי השונה שחווה השעון על האדמה ושעון בגובה ~10 ק"מ. אך השוואה בין השעון שטס מזרחה וזה שטס מערבה – אשר חווים את אותו פוטנציאל כבידתי – נתנה את התארכות הזמן של יחסות פרטית.

אנו לא נחשב במדויק את גודל האפקט, אך נקבל הערכה לסדר הגודל שלו, כאשר המטוסים טסים סבוב כל כדור"א ונוחתים באותה נקודה ממנה המריאו: נתבונן בהפרש הזמן בין שני אירועים – ההמראה והנחיתה של מטוס מספר 1, שטס מזרחה סביב כדור"א. שני האירועים קורים באותו מקום במערכת המטוס, ולכן במערכת זו הזמן ביניהם, Δt_1 הוא הקצר ביותר. זו המערכת העצמית של האירועים.

נשווה את Δt_1 להפרש הזמן Δt שנמדד בין שני האירועים במערכת אינרציאלית שנמצאת במרכז כדוה"א. מערכת זו "יותר" אינרציאלית (מאיצה פחות) ממערכת שעל פני האדמה, כי פני האדמה מסתובבים סביב מרכז כדוה"א.

מאחר שבמערכת האינרציאלית, שני האירועים לא קרו באותו מקום, אז $\Delta t > \Delta t_1$.

באופן מפורש, $\Delta t_1 = \int_0^{\Delta t} \frac{dt}{\gamma_1} \approx \int_0^{\Delta t} dt \left(1 + \frac{1}{2} \beta_1^2 \right)$, כאשר β_1 היא מהירות המטוס ביחס למערכת

האינרציאלית של מרכז כדוה"א (לא מערכת פני האדמה, שאינה אינרציאלית, בשל סיבוב כדוה"א סביב צירו).

כמו במקרה של המיואון, האינטגרל מטפל גם במקרה שמהירות הטיסה של השעון אינה קבועה.

אותה משוואה עבור מטוס מספר 2 שטס מערבה היא $\Delta t_2 = \int_0^{\Delta t} \frac{dt}{\gamma_2} \approx \int_0^{\Delta t} dt \left(1 + \frac{1}{2} \beta_2^2 \right)$.

מאחר שמטוס אחד טס עם כוון הסיבוב של כדוה"א והשני נגדו, מהירויותיהם ביחס למערכת

האינרציאלית שונות. הפרש המהירויות הוא מהירות הסיבוב של פני כדוה"א, β_E .

ההבדל בין שתי המדידות הוא

$$\Delta t_1 - \Delta t_2 \approx \frac{1}{2} \int_0^{\Delta t} dt (\beta_1^2 - \beta_2^2) = \frac{1}{2} \int_0^{\Delta t} dt (\beta_1 + \beta_2)(\beta_1 - \beta_2)$$

אם המהירויות בערך קבועות, פתרון האינטגרל טריוויאלי:

$$\begin{aligned} \Delta t_1 - \Delta t_2 &\approx \frac{1}{2} (\beta_1 + \beta_2)(\beta_1 - \beta_2) \Delta t \\ &= \frac{1}{2} (\beta_1 + \beta_2) D \end{aligned}$$

כאשר $D = (\beta_1 - \beta_2) \Delta t = \beta_E \Delta t$ הוא מסדר גודל הדרך שעבר המטוס ביחס לכדור הארץ (עד

כדי הבדלי הזמן הקטנים בין המערכות, אבל הבדלים אלה לא משנים את $\Delta t_1 - \Delta t_2$ באופן

משמעותי).

עבור טיסה סביב כל כדור הארץ לאורך קו המשווה, D הוא היקף כדוה"א, 4×10^7 m.

ערכים סבירים עבור המהירויות הם $c\beta_1 \sim 250$ m/s, $c\beta_2 \sim 460$ m/s.

$$\Delta t_1 - \Delta t_2 \approx 4 \times 10^7 \text{ m} \left(\frac{710 \text{ m/s}}{3 \times 10^8 \text{ m/s}} \right) = 95 \text{ m}$$

ביחידות טבעיות.

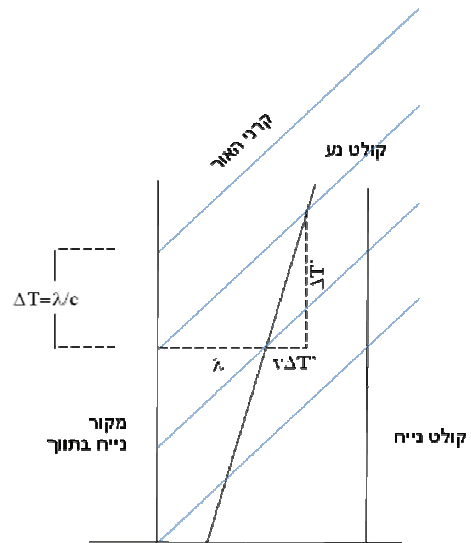
$$\Delta t_1 - \Delta t_2 \approx \frac{95 \text{ m}}{3 \times 10^8 \text{ m/s}} \approx 3 \times 10^{-7} \text{ s}$$

התוצאות שהתקבלו התאימו לציפיות בערך עד כדי דיוק הניסוי של 3%.

אפקט דופלר (Doppler)

בפיזיקה ניוטונית, אפקט דופלר הוא שינוי תדירות הגל עבור צופה שנע ביחס לתווך הנושא את הגל. האפקט ידוע עבור המקרה של צופר של מכונית חולפת, וכו'.

נתבונן בדיאגרמת מרחב-זמן במערכת התווך של גל שנע במהירות c (למשל, מהירות הקול, או מהירות האור בפיזיקה ניוטונית)



מקור נייח בתווך פולט גל בכיוון x ברציפות. הקווים האלכסוניים הם קווי העולם של חזיתות הגל. אורך הגל הוא λ וזמן המחזור שלו $\Delta T = \lambda/c$. קולט נייח ביחס לתווך מודד אתם ערכים עבור

- זמן מחזור ע"י הזמן בין פגיעות של שתי חזיתות גל עוקבות).
- אורך הגל (נמדד ע"י המיקום של חזית הגל הבאה כאשר הקולט נפגע ע"י חזית הגל הנוכחית).

כעת נתבונן בקולט הנע ביחס לתווך במהירות V , גם הוא בכוון x .

- הזמן בין שתי פגיעות של חזיתות הגל בקולט זה הוא $\Delta T'$.
- שתי הפגיעות בקולט הנע ארעו באותו מקום ב- O' .
- אבל ב- O , שתי הפגיעות ארעו במקומות שונים, כי הקולט זז מרחק $V\Delta T'$ בין זמן פגיעה אחת לזמן הפגיעה השנייה.
- אז ב- O , המרחק בין ארועי שתי הפגיעות הוא $V\Delta T'$.
- המרחק שעבר הגל בזמן זה ב- O הוא $c\Delta T'$, וניתן לראות מהציור כי מרחק זה שווה לאורך הגל ועוד המרחק שנע הקולט. כלומר,

$$c\Delta T' = \lambda + V\Delta T'$$

- נפתור עבור $\Delta T'$:

$$\Delta T' = \frac{\lambda}{c-v} = \frac{\lambda/c}{1-V/c} = \frac{\Delta T}{1-V/c}$$

אז הקשר בין התדירות $f' = 1/\Delta T'$ במערכת הקולט והתדירות $f = 1/\Delta T$ במערכת המקור הוא

$$f' = f \left(1 - \frac{V}{c} \right)$$

כאשר מהירות הקולט, V , היא חיובית אם היא בכוון הגל (הקולט מתרחק מהמקור והתדירות יורדת) ושלילית אם היא נגד כוון התקדמות הגל (הקולט מתקרב למקור והתדירות עולה).

שאלת בית: הוכיחו כי אם V' היא מהירות הקולט ו- V היא מהירות המקור, שתיהן ביחס לתווך

נושא הגל, אז $f' = f \left(\frac{c-V'}{c-V} \right)$, כאשר מהירות חיובית היא בכוון הגל שבין המקור לקולט.

(שימו לב שמדובר בבעיה ניוטונית של גל בתווך.)

במקרה היחסותי (כעת c היא מהירות האור) **אין משמעות למערכת התווך**. אך התמונה שצירנו

עדיין מתייחסת נכון **למערכת המקור**.

בנוסף, יש להחיל את התארכות הזמן, כי הנוסחה שמצאנו עבור המקרה הניוטוני,

$$\Delta T' = \frac{\Delta T}{1-V/c}$$

נתונה ביחידות זמן כפי שהן במערכת המקור.

אך פגיעות שתי חזיתות הגל בקולט קורות **באותו מקום במערכת הקולט**, ולכן הזמן שנמדד

במערכת זו קצר ב- $1/\gamma$ מהזמן שנמדד במערכת המקור. כלומר, במקרה היחסותי,

$$\Delta T' = \frac{\Delta T}{\gamma(1-\beta)} = \Delta T \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}$$

ויחסי התדירויות הם

$$f' = f \gamma(1-\beta) = f \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$$

כאשר כעת β היא המהירות היחסית בין הקולט והמקור, והיא חיובית אם הם מתרחקים זה מזה.

שאלת בית: הראו שהנוסחה הניוטונית מתקבלת מתוך הקירוב לסדר ראשון ב- β עבור $\beta \ll 1$.

אפקט דופלר המתואר לעיל נקרא אפקט דופלר האורכי (longitudinal), משום שהתנועה היחסית של המקור והקולט היא בכיוון האור.

אפקט דופלר היחסותי נמדד בניסויים שונים.

המדידה של Grieser et. al. (Appl. Phys. B59, 127) מ-1994 התאימה לציפיות עד כדי החלק ה- 7×10^{-9} .

בנוסף, קיים **אפקט דופלר רוחבי** (transverse), כאשר התנועה היא בניצב לאור, כלומר, קולט רואה את המקור נע בזווית ישרה ביחס לכיוון האור (במערכת הקולט). אפקט זה נובע רק מהתארכות הזמן. במקרה זה, יחס התדירויות הוא $f' = f / \gamma$.

את אפקט דופלר הרוחבי קשה למדוד, משום שהוא מסדר שני במהירות. לכן, רכיב אורכי קטן של המהירות יוצר אפקט דופלר אורכי שגדול בהרבה מהאפקט הרוחבי, עבור מהירויות נמוכות.