תורת הקבוצות — תרגיל בית 6
פתרונות

חיים שרגא רוזנר

ט"ז בסיון, תשע"ה*

תקציר

חזקות סודרים.

תזכורות

1. יהי α סודר. חזקת סודרים מוגדרת ברקורסיה כך:
   (א) $\alpha^0 := 1$.
   (ב) $\alpha^{\beta+1} = \alpha^\beta \cdot \alpha$.
   (ג) עבור סודר גבולי β, $\alpha^\beta = \sup\{\alpha^\gamma : \gamma < \beta\}$.

2. תכונות שהוכחו בכיתה:
   (א) אם $\alpha > 1$, $\beta_1 < \beta_2$, אזי $\alpha^{\beta_1} < \alpha^{\beta_2}$. יש גם גרסה שבה כל האי־שוויונות מוחלפים בגרסה הכהה שלהם (דהיינו $\leq \mapsto <$).
   (ב) אם $\alpha > 1$, $f(\beta) = \alpha^\beta$ מונוטונית ורציפה.
   (ג) אם $\alpha > 0$, $\alpha^{\beta+\gamma} = \alpha^\beta \cdot \alpha^\gamma$.

1 חזקות סודרים

1. רשות: הגדרה עצמית של חזקות סודרים. יהיו α, β סודרים, ותהי $f : \beta \to \alpha$ פונקציה. נגדיר את ה**תומך** של f להיות כל האיברים התחום שתמונתם איננה אפס.

$$\mathrm{supp}(f) := \{\delta \in \beta : f(\delta) \neq 0\}$$

נביט כעת בקבוצת הפונקציות מ־β ל־α שלהן תומך סופי:

$$E(\beta, \alpha) := \{f \text{ is a function from } \beta \text{ to } \alpha : \mathrm{supp}(f) \text{ is finite.}\}$$

על קבוצה זו נגדיר יחס סדר כדלהלן: נניח $f, g \in E(\beta, \alpha)$ פונקציות שונות זו מזו. נביט באיבר המקסימלי δ עבורו $f(\delta) \neq g(\delta)$. (נמקו מדוע קיים מקסימום כזה!) נסמן $f \prec g$ אם $f(\delta) < g(\delta)$. אנו טוענים כי $\prec$ הוא סדר טוב על הקבוצה $E(\beta, \alpha)$, ולפיכך נגדיר $\alpha^\beta := \mathrm{type}(E(\beta, \alpha), \prec)$.

* להגשה עד יום **חמישי** ג' בסיון (21 מאי) לתא מספר 45 בתאי המילגאים של המחלקה למתמטיקה.

(א) במקום להוכיח שזה אכן סדר טוב, הראו כי לכל $\alpha > 0$ ההגדרה הזו מתלכדת עם ההגדרה שהובאה בתזכורת. מכיוון שלפי ההגדרה מהתזכורת, החזקה היא סודר, הרי $\prec$ הוא סדר טוב על $E\left(\beta,\alpha\right)$.

(ב) הראו במישרין מן ההגדרה הזו את התכונות של חזקות סודרים, הן אלו שהובאו בתזכורת והן אלו שיובאו להלן.

פתרון לתרגיל הרשות יתפרסם בנפרד.

2. יהי α סודר. חשבו את ערכו של כל אחד מהביטויים הבאים: $0^\alpha, 1^\alpha, \alpha^1$.

פתרון

- $\alpha^1 = \alpha^{0+1} = \alpha^0 \cdot \alpha = 1 \cdot \alpha = \alpha$.
- נראה באינדוקציה על α שמתקיים $1^\alpha = 1$. $\alpha = 0$ טריוויאלי. $1^{\alpha+1} = 1^\alpha \cdot 1 = 1^\alpha \overset{\text{(ind. ass.)}}{=} 1$. עבור β גבולי, מתקיים לפי הנחת האינדוקציה $\{1^\gamma : \gamma < \beta\} = \{1 : \gamma < \beta\} = \{1\}$, וברור שהסופרמום שלה הוא 1.
- אנו טוענים כי

$$0^\alpha = \begin{cases} 0 & \alpha \text{ is a successor ordinal} \\ 1 & \text{Otherwise} \end{cases}$$

נראה באינדוקציה. $0^0 = 1$. $0^{\alpha+1} = 0^\alpha \cdot 0 = 0$. עבור β גבולי, מתקיים לפי הנחת האינדוקציה $\{0^\gamma : \gamma < \beta\} = \{0, 1\}$ ובמקרה זה הסופרמום הוא 1. נזכיר כי אפס ואחד קודמים לכל סודר גבולי, ולכן $0^0, 0^1$ נמצאים בקבוצה עליה דיברנו כאן. ■

3. יהיו α, β, γ סודרים, $\alpha > 0$. הראו כי $\left(\alpha^\beta\right)^\gamma = \alpha^{\beta\gamma}$.

פתרון נראה באינדוקציה על γ.

- $\gamma = 0$:

$$\left(\alpha^\beta\right)^0 = 1 = \alpha^0 = \alpha^{\beta \cdot 0}$$

- $\gamma + 1$:

$$\begin{aligned}\left(\alpha^\beta\right)^{\gamma+1} &= \left(\alpha^\beta\right)^\gamma \cdot \alpha^\beta \overset{\text{(ind. ass.)}}{=} \alpha^{\beta\gamma} \cdot \alpha^\beta \\ &\overset{\text{(Reminder 2c)}}{=} \alpha^{\beta\gamma+\beta} = \alpha^{\beta\gamma+\beta\cdot 1} = \alpha^{\beta(\gamma+1)}\end{aligned}$$

- γ גבולי:

$$\left(\alpha^\beta\right)^\gamma = \sup\left\{\left(\alpha^\beta\right)^\delta : \delta < \gamma\right\} \overset{\text{ind. ass.}}{=} \sup\left\{\alpha^{\beta\delta} : \delta < \gamma\right\} = \alpha^{\beta\gamma}$$

השויון האחרון נובע מכך שהפונקציה $f\left(\gamma\right) = \alpha^{\beta\gamma}$ היא פונקציה מונוטונית ורציפה, כי היא הרכבה של פונקציות מונוטוניות ורציפות. ■

4. מונוטוניות חלשה של חזקת סודרים. נניח כי $0<\alpha_1\leq\alpha_2$, $\beta_1\leq\beta_2$. הראו כי $\alpha_1^{\beta_1}\leq\alpha_2^{\beta_2}$.

פתרון ראשית נראה הטענה עבור $\beta_1=\beta_2=\beta$. ההכללה נובעת מחיבור טענה זו עם תזכורת 2א. נראה באינדוקציה על β:

- $\beta=0$. שני האגפים שווים ל־1.
- $\beta+1$.

$$\alpha_1^{\beta+1}=\alpha_1^{\beta}\cdot\alpha_1\leq\alpha_2^{\beta}\cdot\alpha_2=\alpha_2^{\beta+1}$$

האי־שויון נסמך על מונוטוניות חלשה של הכפל, כפי שהופיעה בתרגיל בית 5.

- β גבולי.

$$\alpha_1^{\beta}=\sup\left\{\alpha_1^{\gamma}\colon\gamma<\beta\right\}\leq\sup\left\{\alpha_2^{\gamma}\colon\gamma<\beta\right\}=\alpha_2^{\beta}$$

האי־שויון נובע מהנחת האינדוקציה, וכמובן סופרמום מכבד יחס סדר חלש.

ההכללה נובעת מהטיעון הבא: $\alpha_1^{\beta_1}\leq\alpha_2^{\beta_1}\leq\alpha_2^{\beta_2}$, כאשר זה עתה הראינו את האי־שויון הראשון, והשני הוכח בכיתה (תזכורת 2א). ■

2 הגדרות רקורסיביות

כפי שהגדרנו כאן חזקות סדורים בעזרת רקורסיה, ניתן להגדיר גם חיבור סודרים וכפל סודרים בעזרת רקורסיה (בהסתמך על פעולת העוקב $S\colon\alpha\mapsto S\left(\alpha\right)$).

1. הגדירו האופן רקורסיבי חיבור סודרים.

פתרון יהי α סודר. נגדיר ברקורסיה על β את הפונקציה $\alpha+\beta$:

- $\alpha+0\coloneqq\alpha$.
- $\alpha+1\coloneqq S\left(\alpha\right)$.
- $\alpha+\left(\beta+1\right)\coloneqq\left(\alpha+\beta\right)+1$.
- עבור β גבולי, $\alpha+\beta\coloneqq\sup\left\{\alpha+\gamma\colon\gamma<\beta\right\}$.

שקילות ההגדרות הוכחה באופן מצטבר לאורך השיעורים הפרונטליים ושיעורי הבית. ■

2. הגדירו באופן רקורסיבי כפל סודרים.

פתרון יהי α סודר. נגדיר ברקורסיה על β את הפונקציה $\alpha\cdot\beta$:

- $\alpha\cdot0\coloneqq0$.
- $\alpha\cdot\left(\beta+1\right)\coloneqq\alpha\cdot\beta+\alpha$.
- עבור β גבולי, $\alpha\cdot\beta\coloneqq\sup\left\{\alpha\cdot\gamma\colon\gamma<\beta\right\}$.

שקילות ההגדרות הוכחה באופן מצטבר לאורך השיעורים הפרונטליים ושיעורי הבית. ■

ב ה צ ל ח ה!