

תורת הקבוצות – תרגיל בית 9

חיים שרגא רוזנר

כ"ד בסיון, תשע"ה*

תקציר

אקסיומת הבחירה ושקולים.

תזכורות

1. פונקציית בחירה: תהי \mathcal{F} קבוצה של קבוצות לא ריקות. פונקציה $f : \mathcal{F} \rightarrow \bigcup \mathcal{F}$ תיקרא פונקציית בחירה ב- \mathcal{F} אם לכל $A \in \mathcal{F}$ מתקיים $f(A) \in A$.
2. אקסיומת הבחירה: תהי \mathcal{F} קבוצה של קבוצות לא ריקות. אזי קיימת פונקציית בחירה על \mathcal{F} .
3. מערכת אקסיומות ZF היא מערכת האקסיומות שראינו כבר, בתרגיל בית 7, למעט אקסיומת הבחירה.
4. ב-ZF ניתן להראות כי כל אחד מהבאים שקול לאקסיומת הבחירה:
(א) עקרון הסדר הטוב. לכל קבוצה A קיים סדר טוב R עליה.
(ב) הלמה של צורן. בקבוצה סדורה חלקית אשר לכל שרשרת בה יש חסם מלעיל, יש איבר מקסימלי אחד לפחות.
(ג) טריכוטומיות של מונים: תהיינה A, B קבוצות. אזי קיימת פונקציה חח"ע מאחת מהן אל האחרת.

1 תרגילים

בתרגילים הבאים נציין מתי יש לעבוד ב-ZF ונתי ב-ZFC.

1. (ZF). נסחו, במפורש, פונקציית בחירה על הקבוצות הבאות: $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \{0\}, \mathcal{P}(3) \setminus \{0\}$, $\mathcal{P}(\mathbb{Q}) \setminus \{0\}$. שימו לב שהתרגיל הופך לבלתי אפשרי כשעוברים ל- $\mathcal{P}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$.
2. (ZF). נניח כי \mathcal{F} היא קבוצה לא ריקה של קבוצות לא ריקות. קבוצה בוחרת S על \mathcal{F} היא קבוצה המקיימת:

$$S \subseteq \bigcup \mathcal{F} \bullet$$

* להגשה עד יום חמישי ח' בתמוז (25 יוני) לתא מספר 45 בתאי המילגאים של המחלקה למתמטיקה.

$$\bullet \forall A \in \mathcal{F}, |S \cap A| = 1$$

הראינו בכיתה כי אקסיומת הבחירה גוררת את עקרון הסדר הטוב, ועקרון הסדר הטוב גורר את הטענה שלכל קבוצה לא ריקה של קבוצות לא ריקות \mathcal{F} יש קבוצה בוחרת S . הראו כי קיום קבוצה בוחרת גורר את אקסיומת הבחירה, ובכך תשלימו את הוכחת השקילות של שלוש טענות אלו.

3. (ZF). הראו כי אקסיומת הבחירה שקולה לאחת משלוש הטענות הבאות:

- לכל חבורה G קיים סדר טוב עליה.¹
- לכל חוג R קיים סדר טוב עליו.
- לכל שדה F קיים סדר טוב עליו.

4. (ZFC). קבוצה A נקראת סופית אם יש פונקציה חח"ע ממנה ל- ω , אך אין פונקציה חח"ע בכיוון ההפוך. קבוצה אינסופית היא קבוצה שאיננה סופית. תהי A קבוצה אינסופית. אזי קיימת לה תת-קבוצה ממש $B \subsetneq A$ שקולת עוצמה ל- A (קיימות פונקציות חח"ע מכל אחת מהן לאחרת).

ב ה צ ל ח ה!

¹ אין קשר לחבורה סדורה, שהיא חבורה שפעולתה מכבדת את יחס הסדר שלה. למעשה יש קשר: חבורה סדורה מקיימת את תנאי המשפט. אבל אנחנו מתכוונים כאן לסדר טוב סתמי, גם אם איננו קשור למבנה החבורה.