תרגיל 11

27 בינואר 2016

1. הוכח: $|A| \leq |P(A)|$.

פיתרון:

נגדיר פונקציה $f : A \to P(A)$ ע"י $f(a) = \{a\}$. זו פונקציה חח"ע כי אם $a \neq b$ אז $\{a\} \neq \{b\}$.

2. הוכח שלכל $0 < a \in \mathbb{R}$ מתקיים: $|[0,a)| = |(-a,0]|$.

פיתרון:

נגדיר פונקציה $f : [0,a) \to (-a,0]$ ע"י $f(x) = -x$, היא על כי המקור של כל מספר הוא הנגדי שלו, וחח"ע כי אם $x_1 \neq x_2$ אז $-x_1 \neq -x_2$.

3. הוכח או הפרך:

א. אם $|A \setminus B| = |B \setminus A|$ אז $|A| = |B|$.

ב. אם $|A| = |B|$ אז $|A \setminus B| = |B \setminus A|$.

פיתרון:

א. הוכחה: קיימת פונקציה חח"ע ועל $f : A \setminus B \to B \setminus A$. נגדיר פונקציה $g : A \to B$ ע"י: לכל $a \in A \setminus B$ נגדיר $g(a) = f(a)$, אחרת $a \in A \cap B$ ונגדיר $g(a) = a$. נשים לב ש-$A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$, ושזה איחוד זר, כלומר $(A \setminus B) \cap (A \cap B) = \phi$. לכן הפונקציה חח"ע כי אם $a_1 \neq a_2$ אז: אם שניהם שייכים ל$A \setminus B$ נקבל ש-$g(a_1) = f(a_2) \neq f(a_2) = g(a_2)$ בזכות חח"ע של f. אם שניהם ב-$A \cap B$ אז $f(a_1) = a_1 \neq a_2 = f(a_2)$. אם, בלי הגבלת הכלליות, $a \in A \setminus B, b \in A \cap B$ אז $g(a) \in B \setminus A, g(b) \in A \cap B$ וברור שהחיתוך ריק, ולכן הם שונים.

ב. הפרכה: קחו למשל את $A = \mathbb{N}, B = \mathbb{Z}$.

4. הוכח: אם קיימת $f : A \to B$ על אז $|B| \leq |A|$.

פיתרון:

אנו רוצים להגדיר פונקציה $g : B \to A$ שתהיה חח"ע, בהסתמך על f הנתונה. אכן, כיון ש־f על, לכל $b \in B$ יש לפחות מקור אחד. נבחר את אחד המקורות ונסמנו $a (\in A)$ ונגדיר $g(b) = a$. זו פונקציה חח"ע כי לשני איברים שונים $b_1, b_2 \in B$ יש בודאי מקורות שונים, כי פונקציה (כל פונקציה, גם f) היא חד־ערכית.