תרגיל 3

12 בנובמבר 2015

1. הוכיחו את תכונת פילוג חיתוך מעל הפרש $A\cap(B\backslash C)=(A\cap B)\setminus(A\cap C)$ על ידי טבלת אמת
פיתרון:

צריך להוכיח את השקילות הבאה: $p\wedge(q\wedge\neg s)\equiv(p\wedge q)\wedge\neg(p\wedge s)$
נכתוב טבלת אמת עבור הביטוי:

q	p	s	$\neg s$	$(q\wedge\neg s)$	$p\wedge(q\wedge\neg s)$	$(p\wedge q)$	$(p\wedge s)$	$\neg(p\wedge s)$	$(p\wedge q)\wedge\neg(p\wedge s)$
T	T	T	F	F	F	T	T	F	F
T	T	F	T	T	T	T	F	T	T
T	F	T	F	F	F	F	F	T	F
T	F	F	T	T	F	F	F	T	F
F	T	T	F	F	F	F	T	F	F
F	T	F	T	F	F	F	F	T	F
F	F	T	F	F	F	F	F	T	F
F	F	F	T	F	F	F	F	T	F

2. בעזרת תכונות פילוג חיתוך מעל הפרש (שאלה 1), הוכח כי לכל A,B,C מתקיים:
$A\cap(B\triangle C)=(A\cap B)\triangle(A\cap C)$.
רמז: השתמשו בהגדרות השקולות להפרש סימטרי:
פיתרון:

$$\begin{aligned} A\cap(B\triangle C) &= A\cap((B\backslash C)\cup(C\backslash B))= \\ (A\cap(B\backslash C))\cup(A\cap(C\backslash B)) &= ((A\cap B)\setminus(A\cap C))\cup((A\cap C)\setminus(A\cap B)) \\ =(A\cap B)\triangle(A\cap C) & \end{aligned}$$

3. הוכיחו כי עבור $A_1,A_2,\cdots,A_n$ קבוצות מתקיים:
$A_1\triangle A_2\cdots\triangle A_n=\{x\,|x,\ A_i$ נמצא במספר אי זוגי של קבוצות$\}$.
רמז: אינדוקציה.
פיתרון:

בסיס האינדוקציה: עבור $n=2$ ברור כי מתקיים התנאי.

נניח שהתנאי מתקיים עבור n אזי:

$$
\begin{aligned}
A_1 \triangle A_2 \cdots \triangle A_n \triangle A_{n+1} = (A_1 \triangle A_2 \cdots \triangle A_n) \triangle A_{n+1} = \\
\{x \mid (x \in (A_1 \triangle A_2 \cdots \triangle A_n) \wedge x \notin A_{n+1}) \\
\Rightarrow \text{according to the assumption x in odd number of } A_i \\
\mathit{or} \\
(x \in A_{n+1} \wedge x \notin (A_1 \triangle A_2 \cdots \triangle A_n)) \\
\Rightarrow \text{ than x in one grupe + even number } \\
\text{of grupes from } A_i \text{ (according to the assumption)}\}
\end{aligned}
$$

הסבר: רוב מוחלט של הסטודנטים טען כך: $x \in A_1 \triangle A_2 \cdots \triangle A_n \triangle A_{n+1}$ אזי או ש־ $x \in A_1 \triangle A_2 \cdots \triangle A_n \wedge x \notin A_{n+1}$ ואז הוא במספר אי זוגי של קבוצות לפי הנחת האינדוקציה (שזה נכון). או ש־$x \in A_{n+1} \wedge x \notin A_1 \triangle A_2 \cdots \triangle A_n$ ולכן הוא נמצא בקבוצה אחת שזה מספר אי זוגי. שזה לא נכון, כי: מהטענה ש־ $x \notin A_1 \triangle A_2 \cdots \triangle A_n$ לא נובע ש־x לא נמצא באף קבוצה (x יכול להיות בחלק מהקבוצות ולא להיות בהפרש). מה שכן אפשר לומר, לפי הנחת האינדוקציה, אם $x \notin A_1 \triangle A_2 \cdots \triangle A_n$ אז x נמצא במספר זוגי של קבוצות $A_1, A_2, \cdots, A_n$. ולכן כיון ש $x \in A_{n+1}$ וגם במספר זוגי של הקבוצות $A_1, A_2, \cdots, A_n$ (0 הוא מספר זוגי) סה"כ x נמצא במספר אי זוגי של קבוצות.