סיכום תרגיל כיתה 12

<u>תזכורת</u>

יהיו X מ"ט ו-Y קבוצה. תהי $f\colon X \to Y$ העתקת על. אזי אפשר להגדיר טופולוגיה על Y כך שיתקיים התנאי הבא:

U פתוחה במ"ט Y

$$\Updownarrow$$

$f^{-1}(U)$ פתוחה במ"ט X

הטופולוגיה שמושרה בדרך כזאת על ידי פונקציה f על הקבוצה Y הופכת את הפונקציה להעתקת מנה.

עכשיו קצת נשלים קצת את הבניה:

נניח שישנו מ"ט X ובתוכו ניתן יחס שקילות $\sim$. אזי בתור קבוצה Y ניקח את הקבוצ $\hat{X}$ של מחלקות השקילות. נסמן ב- $[x]$ את מכלקת השקילות המכילה את האיבר x. בתור פונקצית על ניקח את הפונקציה $\rho\colon X \to \hat{X}$ כך ש - $\rho(x) = [x]$. התופולוגיה T על $\hat{X}$ שמושרה על ידי ρ נקראת *טופולוגית המנה* .

מ"ט $(\hat{X}, T)$ נקרא *מרחב המנה*.

<u>סימונים</u>: לפעמים את מרחב המנה $(\hat{X}, T)$ מסמנים כ- $X/\sim$.

$$\begin{array}{c} \boldsymbol{X} \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \boldsymbol{\rho}} \\ \boldsymbol{\hat{X}} \end{array}$$

בעיה 1

יהי $\sim$ יחס שקילות על $X = [0,1]$ כך שמחלקות השקילות הן: $\left[0, \frac{1}{3}\right], \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right], \left(\frac{2}{3}, 1\right]$.

א' מה הוא מרחב המנה $\hat{X} = X/\sim$ (עד להומיאומורפיזם) ?

פתרון

מכיוון שסך הכל ישנן 3 מחלקות השקילות נסמן אותן:

$$a := \left[0, \frac{1}{3}\right], b := \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right], c := \left(\frac{2}{3}, 1\right]$$

אזי: $\hat{X} = \{a, b, c\}$.

לפי הגדרת טופולוגית המנה הקבוצות הפתוחות הן אלה שהתמונות ההפוכות שלהן פתוכות ב-$X = [0,1]$. בטבלה הבאה הצגנו את כל תת הקבוצות של $\hat{X}$ והתמונות ההפוכות שלהן:

תת קבוצה A	$\rho^{-1}(A)$	פתוחה ב-$[0,1]$
$\emptyset$	$\emptyset$	פתוחה
$\{a\}$	$\left[0, \frac{1}{3}\right]$	לא פתוחה
$\{b\}$	$\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$	לא פתוחה
$\{c\}$	$\left(\frac{2}{3}, 1\right]$	פתוחה
$\{a, b\}$	$\left[0, \frac{2}{3}\right]$	לא פתוחה
$\{b, c\}$	$\left(\frac{1}{3}, 1\right]$	פתוחה
$\{a, c\}$	$\left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left(\frac{2}{3}, 1\right]$	לא פתוחה
$\hat{X} = \{a, b, c\}$	$[0,1]$	פתוחה

לכן טופולוגית המנה:

$$T = \{\emptyset, \hat{X}, \{b,c\}, \{c\}\}$$

קיבלנו: מרחב המנה: $X/\sim \, = (\hat{X}, T)$.

<u>ב'</u> האם $X/\sim$ מרחב האוסדורף ?
<u>לא</u>, כי, למשל, הנקודון $\{c\}$ לא סגור (המשלים שלו $\{a,b\}$ לא פתוח).
אבל זה אי אפשר במרחב האוסדורף.

<u>ג'</u> מטריזבילי ?
<u>לא</u> כי מ"מ הוא בהכרח האוסדורף.

<u>בעיה 2</u>
א' יהי ~ יחס שקילות על $\mathbb{R}^n$ כך ש- $x \sim y$ אם"ם $||y|| = \big||x|\big|$.
<u>הוכיחו</u> ש- $\mathbb{R}^n/\sim$ הומיאומורפי ל-$[0,\infty)$.

<u>הוכחה:</u> נזכיר שטופולוגיה ב-$\mathbb{R}^n$ מושרה על ידי מטריקה אוקלידית:
$$d(x,y) = ||x-y||$$
נגדיר $f: \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$ כאשר לכל $x \in \mathbb{R}^n$: $f(x) = ||x||$.
זאת פונקציה <u>רציפה</u> וקל להוכיח את זה בעזרת סדרות ב-$\mathbb{R}^n$.
<u>הוכחת הרציפות</u>:=========
תהי $o \in \mathbb{R}^n$ ראשית. אזי לכל $y \in \mathbb{R}^n$: $f(y) = \big||y|\big| = d(y,o)$.
אזי:

$$x_n \to x$$
$$\Downarrow$$
$$d(x_n, x) \to 0$$
$$\Downarrow \; [\; |d(x_n,o) - d(x,o)| \; \leq d(x_n, x) \;]$$
$$|\; ||x_n|| - \big||x|\big| \;| = |d(x_n,o) - d(x,o)| \to 0$$

$$\Downarrow$$
$$|f(x_n) - f(x)| \to 0$$
$$\Downarrow$$
$$f(x_n) \to f(x)$$

<u>סוף הוכחת הרציפות</u>=======

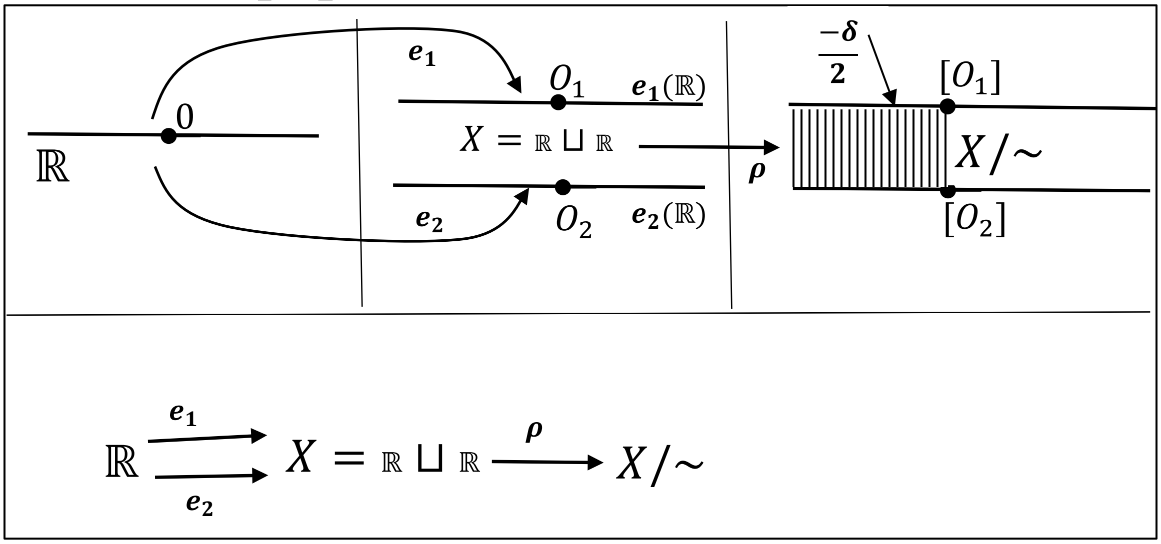
נוכיח ש- f העתקת מנה.
נתבונן: $f|_{[0,\infty)\times\{0\}\times\ldots\times\{0\}}: [0,\infty)\times\{0\}\times\ldots\times\{0\} \to [0,\infty)$.
רואים ש- $f|_{[0,\infty)\times\{0\}\times\ldots\times\{0\}}\big((x,0,\ldots,0)\big) = x$, כלומר הצמצום הוא פונקציה על , רציפה ופתוחה (כי היא הטלה של תחומה על הגורם הראשון!). ולכן הצמצום הוא העתקת מנה.
לפי אחד מהמשפטים בהרצאה זה גורר ש-<u>f העתקת מנה</u>.
מכיוון ש-f מכבדת את יחס השקילות
קיימת פונקציה $h: \mathbb{R}^n/\sim \to [0,\infty)$ כך ש- $h \circ \rho = f$.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^n \arrow[d, "\rho"'] \arrow[dr, "f"] & \\
\mathbb{R}^n/\sim \arrow[r, "h"] & {[0,\infty)}
\end{tikzcd}$$

h היא פונקציה מנה כי f פונקציה מנה.
והיא חח"ע כי f מכבדת <u>מאוד</u> את יחס השקילות.
כלומר h העתקת מנה חח"ע,
אזי h הומיאמורפיזם (ההרצאה), מש"ל.

בעיה 4

יהי $X = \mathbb{R} \sqcup \mathbb{R}$ עם הכלות טבעיות $e_1, e_2 \colon \mathbb{R} \to X$.



נסמן $\mathbb{R}_1 = e_1(\mathbb{R}), \mathbb{R}_2 = e_2(\mathbb{R})$.

יהי $\sim$ יחס שקילות על X כך שלכל $x, y \in X$ מתקיים:

$x \sim y \Leftrightarrow (x = y) \vee (x \in \mathbb{R}_1, y \in \mathbb{R}_2, e_1^{-1}(x) = e_2^{-1}(y) < 0)$.

הוכיחו ש- $X/\sim$ אינו מרחב האוסדורף.

<u>הוכחה:</u>

<u>(ראה\י השרטוט)</u>

נסמן: $O_1 = e_1(0), \;\; O_2 = e_2(0)$.

אזו $\rho \circ e_1(0) = [O_1], \rho \circ e_2(0) = [O_2]$.

מכיוון ש- $e_1^{-1}(O_1) = e_2^{-1}(O_2) = 0$ מקבלים: $O_1 \nsim O_2$

ולכן $[O_1] \neq [O_2]$.

נניח – בשלילה – ש- $X/\sim$ מרחב האוסדורף.

אזי קיימות $U, V \subseteq X/\sim$ פתוחות, <u>זרות</u> כך ש- V-ש $[O_1] \in U, [O_2] \in V$.

מכייון ש-$\rho \circ e_1, \rho \circ e_2$ רציפות, הקבוצות

$e_1^{-1}\big(\rho^{-1}(U)\big), e_2^{-1}\big(\rho^{-1}(V)\big)$ פתחות,

וחוץ מזה $0 \in e_1^{-1}\big(\rho^{-1}(U)\big) \cap e_2^{-1}\big(\rho^{-1}(V)\big)$.

ברור ש- $W = e_1^{-1}\left(\rho^{-1}(U)\right) \cap e_2^{-1}\left(\rho^{-1}(V)\right)$ קבוצה פתוחה ב-$\mathbb{R}$. לכן קיים $\delta > 0$ כך ש- $(-\delta,\delta) \subseteq W$. בפרט $-\frac{\delta}{2} \in W$.
אם נסמן $x_1 = e_1\left(-\frac{\delta}{2}\right), x_2 = e_2\left(-\frac{\delta}{2}\right)$
אז $0 > -\frac{\delta}{2} = e_1^{-1}(x_1) = e_2^{-1}(x_2)$ ולכן $x_1 \sim x_2$.
כלומר $\rho(x_1) = [x_1] = [x_2] = \rho(x_2)$
אבל האיבר הזה שייך ל-$U \cap V$. <u>סתירה</u>.

<u>בעיה 5</u>
יהי $\sim$ יחס שקילות על $\mathbb{R}^3$ כך ש-
$$(x_1,y_1,z_1)\sim(x_2,y_2,z_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2$$
יהי $X = \mathbb{R}^3/\sim$ ו- $\rho: \mathbb{R}^3 \to X$ העתק
<u>הוכיחו</u> ש-$X = \mathbb{R}^3/\sim$ הומיאומורפי ל-$\mathbb{R}^2$.

<u>הוכחה</u>
נגדיר $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ כך ש- $f: \left((x,y,z)\right) \mapsto (x,y)$.
אזי $f = (p_1,p_2)$ כאשר p_1,p_2 שתי ההטלות של $\mathbb{R}^3$ על $\mathbb{R}$.
ההטלות הן פונקציות רציפות לכן f רציפה (ההרצאות).
נתבונן בצמצום $f|_{\mathbb{R}^2\times\{0\}} \to \mathbb{R}^2$. הוא כמובן רציף ויתרה מזה – הוא פתוח.
<u>(הוכחת פתיחות:</u> לכל $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ מתקיים:
$f|_{\mathbb{R}^2\times\{0\}}\left((a,b)\times(c.d)\times\{0\}\right) = (a,b)\times(c.d)$.
בשוויון הזה הקבוצה $(a,b)\times(c.d)\times\{0\}$ שייכת לבסיס הטופולוגיה ב-$\mathbb{R}^2\times\{0\}$, והקבוצה $(a,b)\times(c.d)$ פתוחה ב-$\mathbb{R}^2$.
כלומר $f|_{\mathbb{R}^2\times\{0\}}$ מעבירה כל איבר בסיס לקבוצה פתוחה ולכן היא פתוחה (ההרצאות)).

$f|_{\mathbb{R}^2\times\{0\}}$ רציפה ופתוחה, אזי היא העתקת מנה (משפט מההרצאות).
יחד עם רציפות f שהוכחנו קודם זה גורר ש-f העתקת מנה (משפט מההרצאות). עכשיו נעיר ש- f מכבדת <u>מאוד</u> את יחס השקילות. לכן קיימת $h: X \to \mathbb{R}^2$ <u>חח"ע</u> כך ש-$f = h \circ \rho$. כיוון ש-f העתקת מנה, גם ש-h העתקת מנה (משפט מההרצאות).
סך הכל: h העתקת מנה חח"ע, אז $h: X \to \mathbb{R}^2$ הומיאומורפיזם.
כלומר, X הומיאומורפי ל-$\mathbb{R}^2$, מש"ל.

<u>בעיה 7</u>
יהי (X, T) מ"ט כאשר X קבוצה אינסופית ו-T טופולוגיה קו-סופית.
יהי $\mathbb{R}_S = (\mathbb{R}, \tau_S)$ מ"ט סורגנפריי, כלומר הקבוצה $\mathbb{R}$ עם טופולוגית סורגנפריי. תהי $f: (X,T) \to \mathbb{R}_S$ רציפה.
<u>הוכיחו</u> ש-f קבועה.

<u>הוכחה</u>
1. המרחב (X,T) קשיר.
<u>הוכחת קשירות של (X,T)</u>
הטופולוגיה T המוגדר באופן הבא:
$T = \{\emptyset\} \cup \{U \subseteq X | U^c \text{ קבוצה סופית}\}$.
נניח – <u>בשלילה</u> ש-(X,T) אינו קשיר.

אזי קיימת קבוצות $U, V \subseteq X$ כך ש-

$$(*) \quad U, V \neq \emptyset$$
$$(**) \quad U, V \in T$$
$$(***) \quad U \cup V = X$$

(***) גורר ש-$V = U^c, U = V^c$. לכן לפי (**) U, V קבוצות סופיות.
לכן – בגלל (***) – גם X קבוצה סופית שסותר לתנאי.
אז X קשיר, מש"ל.
לכן $f(X)$ תת מרחב קשיר ב-$\mathbb{R}_S$.

2. ב-$\mathbb{R}_S$ תת מרחב קשיר לא יכול להכיל שתי נקודות שונות.

הוכחה
נניח – בשלילה – שקיימות שתי נקודות בקבוצה $\mathbb{R}$ כך ש-$a < b$ והן שייכות לאותו תת מרחב קשיר C.
אזי $a \in A := (-\infty, b)$ ו- $b \in B := [b, \infty)$. קל לבדוק ש-

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[b - n, b - \frac{1}{n}\right), B = \bigcup_{n=1}^{\infty} [b, b + n)$$

ולכן A, B פתוחות במרחב סורגנפריי. ואז $A \cap C, B \cap C$ פתוחות ב-C.
ברור ש-$A \cap B = \emptyset$ ו-$A \cup B = \mathbb{R}$.
לכן:
$(A \cap C) \cap (B \cap C) = \emptyset$.
$(A \cap C) \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C = \mathbb{R} \cap C = C$.
ולבסוף: $a \in A \cap C$ ו- $b \in B \cap C$.
כלומר, פיצלנו C לשתי קבוצות פתוחות, זרות ולא ריקות. סתירה.
3. מ-"1" ו-"2" נובע שהקבוצה $f(X)$ מכילה רק נקודה אחת.
כלומר, f קבועה, מש"ל.

את שתי הבעיות הבאות (8 ו-9) בעמוד הבא העברתי לתרגיל בית (ולפתרונותיו) שיופיע עוד מאט.

בעיה 8

תהי A תת קבוצה ב-$\mathbb{R}$ כך ש- $A \subsetneq \mathbb{R}, \bar{A} = \mathbb{R}$.

הוכיחו שתת מרחב A לא קשור.

בעיה 9

יהי מ"מ M כך שהקבוצה $M - \{a\}$ לא סגורה.

הוכיחו: קיים שיכון $g: A \to M$ כאשר $A = \{0\} \cup \left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$