תרגיל 7

1. תהא $A \subsetneq \mathbb{R}$ קבוצה צפופה ב $\mathbb{R}$. הוכיחו כי A לא קשירה.
פתרון:
כיוון ש $A \neq \mathbb{R}$ אזי קיים $x \in \mathbb{R} \backslash A$. כעת נגדיר $V_1 = (x, \infty), V_2 = (-\infty, x)$ פתוחות ב $\mathbb{R}$ ולכן $A \cap V_i \neq \emptyset$ (לכל i) כי A צפופה. נקבל מכאן כי
$$A = [A \cap V_1] \uplus [A \cap V_2]$$
פירוק של A לאיחוד זר של קבוצות פתוחות (ב A) זרות לא ריקות. לכן A אינה קשירה.

2. יהי (X, τ) מ"ט. הוכיחו ש (X, τ) טריויאלי אמ"ם לכל $X \subseteq A \neq \emptyset$, A צפופה ב X.
פתרון:
$(\Rightarrow)$ צ"ל $\tau = \{\emptyset, X\}$. נניח בשלילה כי $\emptyset, X \neq O \in \tau$ אזי $O^c \neq \emptyset, X$ סגורה ולכן $cl(O^c) = O^c \neq X$ בסתירה לנתון.
$(\Leftarrow)$ צ"ל לכל $X \subseteq A \neq \emptyset$, A צפופה ב X. תהא $X \subseteq A \neq \emptyset$ כיוון שהנתון הוא ש $\tau = \{\emptyset, X\}$ הקבוצות הסגורות היחידות הן $\{\emptyset, X\}$ ולכן $cl(A) = X$. כלומר A צפופה.

3. יהי X מרחב טופולוגי. תהיינה $U \subseteq X$ קבוצה פתוחה ו$-$ $A \subseteq X$ קבוצה **צפופה**, כלומר $cl(A) = X$.
   (א) הוכיחו: $U \subseteq cl(A \cap U)$.
   פתרון:
   יהא $x \in U$ צ"ל $x \in cl(A \cap U)$. ש"ל לכל סביבה פתוחה $x \in V$ מתקיים כי $A \cap U \cap V \neq \emptyset$. אכן, לכל V כזאת, כיוון ש $U \cap V$ פתוחה לא ריקה (כי $x \in U \cap V$) ו A צפופה מתקיים כי $A \cap U \cap V \neq \emptyset$.
   (ב) הוכיחו: $cl(U) = cl(A \cap U)$.
   פתרון:
   $(\subseteq)$ מסעיף קודם $U \subseteq cl(A \cap U)$ ולכן $cl(U) \subseteq cl(A \cap U)$.
   $(\supseteq)$ $A \cap U \subseteq U$ ולכן $cl(A \cap U) \subseteq cl(U)$

4. איזה תכונות הפרדה מקיים המרחב הבא?
$(\mathbb{N}, \tau)$ כאשר $\tau = \{O_n\}_{n \in \mathbb{N}} \cup \{\mathbb{N}, \emptyset\}$ ו $O_n = \{1, ..., n\}$.
פתרון:
הוא T_0 בלבד. הוכחה:
T_0: יהיו $x_1 \neq x_2$. בה"כ $x_1 < x_2$ ואז $x_1 \in O_{x_1}$ ו $x_2 \notin O_{x_1}$.
לא T_1: יהיו $x_1 \neq x_2$. במידה ו $x_2 < x_1$ אזי כל קבוצה פתוחה שמכילה את x_1 תכיל גם את x_2 לפי הגדרת O_n. לכן לא נוכל למצוא קבוצה פתוחה U כך ש $x_1 \in O$ ו $x_2 \notin O$.

5. הוכיחו כי T_2 הוא תורשתי. כלומר, יהא (X,τ) מ"ט T_2 הוכיחו כי כל תת מרחב $Y \subseteq X$ הוא גם T_2.

פתרון:

יהא Y תת מרחב של X. יהיו $y_1 \neq y_2$ ב Y. הנקודות $y_1.y_2$ גם ב X ולכן קיימות סביבות פתוחות (ב X) זרות V_1, V_2 כך ש $y_i \in V_i$. נקבל כי $y_i \in V_i \cap Y$ ואלו סביבות פתוחות ב Y וזרות.

6. יהא (X,τ) מ"ט בעל תכונה T_2. תהא $\tau \subseteq \tau'$ טופולוגיה נוספת על X. הוכיחו כי (X,τ') גם כן T_2.

פתרון:

יהיו $x_1 \neq x_2$ ב X אזי קיימות $V_1, V_2 \in \tau$ זרות כך ש $x_i \in V_i$. כיוון ש $\tau \subseteq \tau'$ אז $V_1, V_2 \in \tau'$ יפרידו בין x_1, x_2 .

7. בתרגיל זה נוכיח כי כל מ"מ (X,d) הוא T_4. יהא (X,d) מ"מ ויהיו S_1, S_2 קבוצות סגורות זרות.

(א) לכל $x \in S_1$ הוכיחו כי $d(x,S_2) > 0$

פתרון:

נניח בשלילה כי קיים $x \in S_1$ כך ש $d(x,S_2) = 0$ אזי קיימים $y_n \in S_2$ כך ש $d(x,y_n) \to 0$, כלומר $y_n \to x$. כיון ש S_2 סגורה אז גם $x \in S_2$ בסתירה לכך ש S_1, S_2 זרות.

(ב) לכל $x \in S_1$ נגדיר $r_x = \frac{d(x,S_2)}{2}$ ונגדיר $V_1 = \cup_{x\in S_1} B(x,r_x)$. באופן דומה, לכל $y \in S_2$ נגדיר $r_y = \frac{d(y,S_1)}{2}$ ונגדיר $V_2 = \cup_{y\in S_2} B(y,r_y)$. ברור כי V_1, V_2 פתוחות וזרות ו $S_i \subseteq V_i$. הוכיחו כי V_1, V_2 זרות וזה יסיים את ההוכחה כי (X,d) הוא T_4.

פתרון:

נניח בשלילה החיתוך $V_1 \cap V_2$ אינו ריק. אזי קיימים $x \in S_1, y \in S_2$ כך ש $z \in B(x,r_x) \cap B(y,r_y)$ אינו ריק. בה"כ $r_y \leq r_x$. נקבל כי

$$d(x,y) \leq d(x,z)+d(z,y) < r_x+r_y \leq 2r_x = d(x,S_2) = \inf\{d(x,\tilde{y}) : \tilde{y} \in S_2\}$$

סתירה.

8. נראה מרחב שהוא T_2 שאינו T_3. נתבונן ב$\mathbb{R}$ ובתת קבוצה שלו $S = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$. נגדיר $\mathbb{CL}$ את קבוצת הקבוצות הסגורות ב $\mathbb{R}$ לפי המטריקה האוקלידית. ונגדיר $\{C = A \cup T | \, A \in \mathbb{CL}, \, T \subseteq S\}$ להיות הקבוצות הסגורות בטופולגיה τ (כלומר τ מוגדרת להיות כל קבוצת כל המשלימים של קבוצות אלו). תאמינו לנו, τ יוצאת טופולוגיה.

(א) נאפיין את הקבוצות הפתוחות: הוכיחו כי $O \in \tau \iff O = B \cap R$ כאשר B פתוחה בטופולוגיה האוקלידית ו$S^c \subseteq R$.

פתרון:

$O \in \tau$ פתוחה אמ"מ $O^c = A \cup T$ סגורה אמ"מ $O = A^c \cap T^c = B \cap R$ מקיימת $B = A^c$ פתוחה בטופולוגיה האוקלידית ו $R = T^c \supseteq S^s$

(ב) הוכיחו שτ מכילה את הטופולוגיה האוקלידית, והסיקו ש $(\mathbb{R},\tau)$ הוא האוסדורף.

פתרון:

תהי O פתוחה בטופולוגיה האוקלידית. אז $O = O \cap \mathbb{R}$, ומתקיים ש O פתוחה בטופולוגיה האוקלידית, ו$S^c \subseteq \mathbb{R}$. לכן O פתוחה ב τ. הטופולוגיה האוקלידית היא T_2 , ותרגיל אחר שעשיתם (ואם לא, תעשו!) שכל טופולוגיה שמכילה טופולוגיה האוסדורפית, היא האוסדורפית.

(ג) הראו שאם $O \in \tau$ כך ש $S \subseteq O$, אז O פתוחה בטופולוגיה האוקלידית.
פתרון:

לפי סעיפים קודמים, יש B פתוחה בטופולוגיה האוקלידית, ו $R \subseteq S^c$ כך ש $O = B \cap R$. נראה כי $O = B$ ע"י שנראה כי $R = \mathbb{R}$ ואז נסיים. אכן, מהנתון כי $S \subseteq O = B \cap R$ נקבל כי $S \subseteq R$ אבל כיוון שגם $S^c \subseteq R$ נקבל כי $\mathbb{R} = S \cup S^c \subseteq R$ ולכן הם שווים.

(ד) הוכיחו שלא קיימות U, V פתוחות בτ וזרות כך ש $0 \in U, S \subseteq V$. הסיקו ש $(\mathbb{R}, \tau)$ אינו T_3.
פתרון:

נניח בשלילה שיש קבוצות כאלו.

אם $V \in \tau$ כך ש $S \subseteq V$ אז V פתוחה בטופולוגיה האוקלידית, לפי סעיף קודם.

בנוסף, $U = B \cap R$ עבור B פתוחה בטופולוגיה האוקלידית ו$S^c \subseteq R$.

לפי ההנחה בשלילה, $U \cap V = \emptyset$. כלומר, $B \cap R \cap V = \emptyset$.

$0 \in B$. וB פתוחה בטופולוגיה האוקלידית לכן קיים $B(0, \epsilon) \subseteq B$ ואז $\emptyset \neq B(0, \epsilon) \cap S \subseteq B \cap S$. כלומר החיתוך $B \cap S$ אינו ריק ולכן גם $B \cap S \subseteq B \cap V$.

כלומר, $B \cap V \neq \emptyset$. מכיוון ששתיהן פתוחות בטופולוגיה האוקלידית, $B \cap V$ פתוחה באוקלידית ולכן היא לא בת מנייה, כלומר $|B \cap V| > \aleph_0$ (להזכירכם כל קבוצה פתוחה ב$\mathbb{R}$ היא לא בת מניה כי היא מכילה קטע פתוח).

כעת, $R^c \subseteq S$. כלומר, המשלים של R הוא בן מנייה. לכן $B \cap V \nsubseteq R^c$. זה אומר ש $[B \cap V] \cap R \neq \emptyset$. סתירה.

נשים לב כי $S = \emptyset \cup S$ סגורה בτ, ו$0 \notin S$. אבל ראינו שלא ניתן להפריד בין 0 לS. מסקנה: $(\mathbb{R}, \tau)$ הוא לא T_3.