משוואות דיפרנציאליות רגילות - תרגול 8

המשך מערכת מסדר לינארית

החלק ההומוגני (תזכורת)

בהינתן מערכת $\vec{y}'(t)=A(t)\vec{y}(t)$ עלינו למצוא n פתרונות בת"ל $\vec{y}^{(1)},\dots,\vec{y}^{(n)}$, הפתרון הכללי יהיה כל שהם:

$$\vec{y}=c_1\vec{y}^{(1)}+\dots+c_n\vec{y}^{(n)}$$

אם $\vec{y}^{(1)},\dots,\vec{y}^{(n)}$ בת"ל

$$\det(Y)=\det\begin{pmatrix} | & & | \\ \vec{y}^{(1)} & \cdots & \vec{y}^{(n)} \\ | & & | \end{pmatrix}=W\neq 0$$

(Y מטריצה יסודית)

דרך נוספת לכתוב את הפתרון הכללי היא $\vec{y}=Y\vec{c}$ כאשר $\vec{c}=\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ וקטור עמודה של n קבועים חופשיים.

המקרה האי-הומוגני: וריאציית מקדמים

המערכת מהצורה $\vec{y}'(t)=A(t)\vec{y}(t)+\vec{b}(t)$

- נמצא פתרון לחלק ההומוגני $\vec{y}=Y\vec{c}$ ($\vec{c}$, קבועים)
- כעת נמצא פתרון פרטי לאי-הומוגני מהצורה:

$$\vec{y}_p=Y\vec{c}(t)\longrightarrow$$

כאשר זה וקטור של פונ'

נגזור ונקבל:

$$\begin{cases} \vec{y}_p{}'=Y'\vec{c}(t)+Y\vec{c}\,'(t) \\ \vec{y}_p{}'=A(t)\vec{y}_p+\vec{b}(t) \end{cases}$$

$\vec{y}_p$ פתרון לאי הומוגני ולכן נשווה ונקבל:

$$\underbrace{Y'}_{=A(t)Y}\vec{c}(t)+Y\vec{c}\,'(t)=A(t)\underbrace{\vec{y}_p}_{=Y\vec{c}(t)}+\vec{b}(t)$$

מהנתון כי כל וקטור עמודה מקיים את החלק ההומוגני.

ולאחר צמצום נשאר עם:

$$Y\vec{c}\,'(t)=\vec{b}(t)$$

$$\vec{c}'(t) = Y^{-1}\cdot\vec{b}(t)$$ ומכאן

$\leftarrow$ ק"ימ כי $\det Y \neq 0$

$$\vec{c}(t) = \int Y^{-1}(t)\,\vec{b}(t)\,dt + \vec{k} \longleftarrow$$ (וקטור של קבועים)

בסה"כ: (פתרון כללי)

$$\boxed{\vec{y} = \underbrace{Y(t)\cdot\vec{k}}_{\text{פ"כ הומוגני}} + \underbrace{Y(t)\int Y^{-1}(t)\,\vec{b}(t)\,dt}_{\text{פתרון לא הומוגני}}}$$

מערכת של מד"ר עם מקדמים קבועים

נתבונן במערכת ההומוגנית הבאה: $\vec{y}' = A\vec{y}$

כאשר A אינה תלויה ב t, איברים קבועים.

ננחש: $\vec{y} = \vec{v}e^{\lambda t}$ ($\vec{v}$ וקטור של קבועים) $\Leftarrow$ $\vec{y}' = \lambda\vec{v}e^{\lambda t}$

מהמערכת נקבל $\lambda\vec{v}e^{\lambda t} = A\vec{v}e^{\lambda t}$ $/ \div e^{\lambda t}$

$\Rightarrow A\vec{v} = \lambda\vec{v} \rightarrow$ אם $\vec{v}$ וקטור עצמי של A עם ע"ע λ אזי מצאנו פתרון.

אלגוריתם לפתירת מערכת מד"ר עם מקדמים קבועים:

(i) מצא את כל הע"ע של A: $\lambda_1,\dots,\lambda_n$

(ii) עבור כל ע"ע שונה ישנם מספר מקרים:

מקרה I: (Simple real eigenvalue)

λ_j ע"ע ממשי פשוט (מופיע בחזקת 1 במשוואה = ריבוי אלגברי 1).
נמצא ו"ע השייך לו, $\vec{v}_j$, ונבנה פתרון $\vec{y}^{(j)} = \vec{v}_j e^{\lambda_j t}$

דוגמא: המשוואה המאפיינת תהיה $\det(\lambda I - A) = 0$

$$\det\left(\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}4 & -3\\ 8 & -6\end{pmatrix}\right) = 0 \Rightarrow \det\begin{pmatrix}\lambda-4 & 3\\ -8 & \lambda+6\end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^2 + 2\lambda = 0 \Rightarrow \lambda(\lambda+2) = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = -2}$$

דף 2

נמצא ו"ע עבור $\lambda_1=0$:

$$A\vec{v}=\lambda_1\vec{v} \qquad \vec{v}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}4&-3\\8&-6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=0\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}4a-3b=0\\8a-6b=0\end{cases} \Rightarrow a=\frac{3b}{4}$$

$$\Rightarrow \vec{v}=\begin{pmatrix}\frac{3b}{4}\\b\end{pmatrix} \xrightarrow[b=4]{\text{נציב}} \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$$

ולכן פתרון ראשון הינו:

$$\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}e^{0\cdot t}=\boxed{\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}}$$

עבור $\lambda_2=-2$ מקבלים ו"ע $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ והפתרון $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}e^{-2t}$

הפתרון הכללי יהיה:

$$\boxed{\vec{y}=c_1\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}e^{-2t}\\2e^{-2t}\end{pmatrix}}$$

מקרה II: (Simple complex conjugate pair eigenvalues)

λ_j ו λ_{j+1} זוג ע"ע מרוכבים צמודים פשוטים. מוצאים להם ו"ע מרוכבים צמודים $\vec{v}_j$ ו $\vec{v}_{j+1}=\overline{\vec{v}_j}$. נקבל שני פתרונות מרוכבים:

$$\vec{\tilde{y}}_j=\vec{v}_j e^{\lambda_j t}$$

$$\vec{\tilde{y}}_{j+1}=\vec{v}_{j+1}e^{\lambda_{j+1}t}=\overline{\vec{v}_j}\,e^{\overline{\lambda_j}t}=\overline{\vec{v}_j e^{\lambda_j t}}=\overline{\vec{\tilde{y}}_j}$$

נקח צ"ל "חכמים" שלהם:

$$\vec{y}_j=\frac{1}{2}\vec{\tilde{y}}_j+\frac{1}{2}\vec{\tilde{y}}_{j+1}=\frac{1}{2}\left(\vec{\tilde{y}}_j+\overline{\vec{\tilde{y}}_j}\right)=\boxed{\mathrm{Re}\left(\vec{\tilde{y}}_j\right)}$$

$$\vec{y}_{j+1}=\frac{1}{2i}\vec{\tilde{y}}_j-\frac{1}{2i}\vec{\tilde{y}}_{j+1}=\frac{1}{2i}\left(\vec{\tilde{y}}_j-\overline{\vec{\tilde{y}}_j}\right)=\boxed{\mathrm{Im}\left(\vec{\tilde{y}}_j\right)}$$

דוגמא: פתור

$$\vec{y}\,'=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&-2\\3&2&1\end{pmatrix}\vec{y}$$

פתרון משוואה מאפיינית

$$\det|\lambda I - A| = 0$$

$$\det\begin{pmatrix} \lambda-1 & 0 & 0 \\ -2 & \lambda-1 & 2 \\ -3 & -2 & \lambda-1 \end{pmatrix} = (\lambda-1)\begin{vmatrix} \lambda-1 & 2 \\ -2 & \lambda-1 \end{vmatrix} + 0 + 0$$

פיתוח לפי שורה 1

$$= (\lambda-1)\left[(\lambda-1)^2+4\right] = (\lambda-1)(\lambda^2-2\lambda+5) = 0$$

$$\lambda_1 = 1 \qquad \lambda_{2,3} = \frac{2\pm\sqrt{4-20}}{2} = \frac{2\pm\sqrt{-16}}{2} = 1\pm 2i$$

עבור $\lambda_1=1$ נחפש ו"ע $\quad \vec{v}=\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad A\vec{v} = 1\cdot\vec{v}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a = a \\ 2a+\cancel{b}-2c = \cancel{b} & c = a \\ 3a+2b+\cancel{c} = \cancel{c} \Rightarrow & b = -\frac{3a}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ -\frac{3}{2}a \\ a \end{pmatrix}$$

נבחר $a=2$ ונקבל $\vec{v}_1=\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ ו"ע ל $\lambda_1=1$.

ולכן פתרון פרטי:
$$\begin{pmatrix} 2e^t \\ -3e^t \\ 2e^t \end{pmatrix}$$

עבור $\lambda_2 = 1+2i$ נחפש ו"ע: (אין צורך בצמוד)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = (1+2i)\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} a = (1+2i)a \Rightarrow \boxed{a=0} \\ \cancel{2a}+b-2c = (1+2i)b \Rightarrow -2c = 2ib \\ \cancel{3a}+2b+c = (1+2i)c \\ \boxed{b = ic} \end{matrix}$$

נקבל $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ ic \\ c \end{pmatrix}$, נקח $c=1$ ונקבל ו"ע $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 1 \end{pmatrix}$

3 מ3

ולכן נקבל פתרון פרטי:

$$\begin{pmatrix}0\\ i\\ 1\end{pmatrix} e^{(1+2i)t} = \begin{pmatrix}0\\ i\\ 1\end{pmatrix} e^{t}(\cos 2t + i\sin 2t) = \begin{pmatrix}0\\ ie^t\cos 2t - e^t\sin 2t\\ e^t\cos 2t + ie^t\sin 2t\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}0\\ -e^t\sin 2t\\ e^t\cdot\cos 2t\end{pmatrix} + i\begin{pmatrix}0\\ e^t\cos 2t\\ e^t\sin 2t\end{pmatrix}$$

(בעצם הרווחנו שני פתרונות פרטיים.)

הפתרון הכללי:

$$\boxed{\vec{y} = C_1\begin{pmatrix}2e^t\\ -3e^t\\ 2e^t\end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix}0\\ -e^t\sin 2t\\ e^t\cos 2t\end{pmatrix} + C_3\begin{pmatrix}0\\ e^t\cos 2t\\ e^t\sin 2t\end{pmatrix}}$$

מטריצה יסודית

$$Y = \begin{pmatrix}2e^t & 0 & 0\\ -3e^t & -e^t\sin 2t & e^t\cos 2t\\ 2e^t & e^t\cos 2t & e^t\sin 2t\end{pmatrix}$$

<u>מקרה III</u>: (complete eigenvalue)

λ_i ע"ע <u>לא פשוט</u> (מופיע יותר מפעם אחת) עם מ"ל ריבוי אלגברי.
נניח ריבוי אלגברי m. λ_i ע"ע מלא אם ניתן למצוא עבורו m וקטורים עצמיים <u>בת"ל</u>.

<u>דוגמא:</u>

$$\vec{y}\,' = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\vec{y}$$

ע"ע $\lambda=1$ בריבוי אלגברי 2. נמצא ו"ע ע"י השאלה

מתי $A\vec{v} = 1\cdot\vec{v}$ $\Leftarrow$ $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\vec{v} = \vec{v}$ $\Leftarrow$

$I\vec{v} = \vec{v}$ זה נכון לכל $\vec{v}$ ולכן נוכל לקחת שני וק' עצמיים בת"ל כרצוננו $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$ $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ נקבל שני פתרונות $\vec{y}_1 = \begin{pmatrix}e^t\\ 0\end{pmatrix}$ $\vec{y}_2 = \begin{pmatrix}0\\ e^t\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{y} = C_1\begin{pmatrix}e^t\\ 0\end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix}0\\ e^t\end{pmatrix}}$$

מקרה IV: λ ע"ע לא פשוט (ריבוי אלגברי $m>1$) עם פחות מ-m ו"ע (ריבוי גאומטרי $\geq m$) (defective eigenvalue)

נחפש פתרון מהצורה:

$$e^{\lambda t}\left(\vec{v}_0+\vec{v}_1 t+\dots+\vec{v}_{m-1}t^{m-1}\right)$$

<u>דוגמא</u>: פתור:

$$\vec{y}'=\begin{pmatrix}2&1\\0&2\end{pmatrix}\vec{y}$$

<u>פתרון</u>: ע"ע $\lambda=2$ בריבוי אלגברי 2. נמצא ו"ע $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ עבורו,

$$\begin{pmatrix}2&1\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} \Leftarrow$$

$$\begin{cases}2a+b=2a\\2b=2b\end{cases} \Rightarrow b=0$$

a יכול לקבל כל ערך $\Leftarrow$ נבחר $a=1$ ונקבל $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}e^{2t}\\0\end{pmatrix}$. מכאן יש לנו פתרון אחד

נחפש פתרון מהצורה:

$$\vec{y}=e^{2t}\left(\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}t\right)=e^{2t}\begin{pmatrix}a+ct\\b+dt\end{pmatrix}$$

אם נגזור: נקבל

$$\vec{y}'=2e^{2t}\begin{pmatrix}a+ct\\b+dt\end{pmatrix}+e^{2t}\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}$$

בנוסף מהמערכת נקבל:

$$\vec{y}'=\begin{pmatrix}2&1\\0&2\end{pmatrix}\left(e^{2t}\cdot\begin{pmatrix}a+ct\\b+dt\end{pmatrix}\right)=$$

$$=\begin{pmatrix}2e^{2t}(a+ct)+e^{2t}(b+dt)\\2e^{2t}(b+dt)\end{pmatrix}=e^{2t}\begin{pmatrix}2a+b+(2c+d)t\\2b+2dt\end{pmatrix}$$

נשווה בניהם לקבל:

$$\begin{cases}2a+c=2a+b \Rightarrow \boxed{c=b}\\2c=2c+d \Rightarrow \boxed{d=0}\\2b+d=2b\\2d=2d\end{cases}$$

(a נשאר חופשי)

$$\vec{y} = e^{2t}\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix} t\right) \overset{\text{ונקבל:}}{=} e^{2t}\begin{pmatrix} a+bt \\ b \end{pmatrix} \overset{\text{כינוס נדיב}}{=} a\begin{pmatrix} e^{2t} \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} te^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$$

ולכן הפתרון הכללי יהיה:

$$\boxed{\vec{y} = C_1\begin{pmatrix} e^{2t} \\ 0 \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} te^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}}$$

דוגמא לפתרון מערכת מד"ר א' הומוגני (וריאצית המקדמים)

פתרון:

$$\vec{y}' = \underbrace{\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 8 & -6 \end{pmatrix}}_{A(t)} \vec{y} + \underbrace{\begin{pmatrix} t \\ e^{t} \end{pmatrix}}_{\vec{b}(t)}$$

תחילה יש לפתור חלק הומוגני לקבל המטריצה היסודית —
את החלק ההומוגני פתרנו בדוגמא למקרה I ולכן:

$$Y = \begin{pmatrix} 3 & e^{-2t} \\ 4 & 2e^{-2t} \end{pmatrix}$$

כעת צריך לחשב Y^{-1} (ההפכי)

$$Y^{-1}(t) \overset{\text{mupad}}{=} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -2e^{2t} & \frac{3e^{2t}}{2} \end{pmatrix}$$

כעת נחשב:

$$\vec{c}'(t) = Y^{-1}(t) \cdot \vec{b}(t) = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -2e^{2t} & \frac{3e^{2t}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ e^{t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t - \frac{1}{2}e^{t} \\ -2te^{2t} + \frac{3e^{3t}}{2} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{c}(t) = \int \vec{c}'(t)\,dt \overset{\text{אינטגרל רכיב-רכיב}}{=} \begin{pmatrix} \frac{t^2}{2} - \frac{e^{t}}{2} + k_1 \\ -e^{2t}t + \frac{e^{2t}}{2} + \frac{e^{3t}}{2} + k_2 \end{pmatrix}$$

ניתן לכפל ב $Y(t)$ משמאל לפי $\vec{y} = Y \cdot \vec{c}(t)$

$$Y(t)\cdot\left(\int Y^{-1}(t)\,\vec{b}(t)\,dt + \vec{k}\right) =$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{3t^2}{2} - t - e^t + \frac{1}{2} \\ 2t^2 - 2t - e^t + 1 \end{pmatrix}}_{\vec{y_p}} + \underbrace{k_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ 2e^{-2t} \end{pmatrix}}_{\vec{y_h}}$$

וזה הפתרון הכללי למערכת.