פתרון תרגיל 9 אנליזה הרמונית תש"ף

1 בינואר 2020

1. נשתמש בהרחבה האי־זוגית, f_{odd}; זו פשוט f על הקטע $[-\pi,\pi]$, כי f אי־זוגית. ובכן, $a_0 = a_n = 0$, ובנוסף:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f_{odd}\left(x\right)\sin nx = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}\frac{x}{\pi}\sin nxdx$$

נחשב את האינטגרל באמצעות אינטגרציה בחלקים, ונקבל:

$$= \frac{2}{\pi^2}\cdot\frac{-\pi\left(-1\right)^n}{n} = \frac{2\left(-1\right)^{n+1}}{\pi n}$$

ולכן:

$$\frac{x}{\pi} \sim \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\left(-1\right)^{n+1}}{\pi n}\sin nx$$

2. בתרגולים של הצהריים הספקנו את התרגיל הזה בתרגול. בכל אופן, שוב מסתכלים על f_{odd}, שוב $a_n = a_0 = 0$, ובנוסף:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f_{odd}\left(x\right)\sin nx = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}\frac{\sin ax}{\sin a\pi}\sin nxdx$$

פה כדאי להשתמש בזהות: $\sin\alpha\sin\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2}$:

$$= \frac{2}{\pi\sin a\pi}\int\limits_{0}^{\pi}\left(\frac{\cos\left(nx-ax\right)-\cos\left(nx+ax\right)}{2}\right)dx = \frac{1}{\pi\sin a\pi}\int\limits_{0}^{\pi}\left(\cos\left(\left(n-a\right)x\right)-\cos\left(\left(n+a\right)x\right)\right)dx =$$

$$\frac{1}{\pi\sin a\pi}\cdot\left.\frac{\sin\left(\left(n-a\right)x\right)}{n-a}\right|_0^{\pi}\cdot\left.\frac{\sin\left(\left(n+a\right)x\right)}{n+a}\right|_0^{\pi} = \frac{1}{\pi\sin a\pi}\cdot\left(\frac{\sin\left(\left(n-a\right)\pi\right)}{n-a}-\frac{\sin\left(\left(n+a\right)\pi\right)}{n+a}\right)$$

פה כדאי להשתמש בזהות: $\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\sin\beta\cos\alpha$, ולזכור ש: $\sin n\pi=0,\ \cos n\pi=(-1)^n$; נקבל:

$$=\frac{1}{\pi\sin a\pi}\cdot\left(\frac{-\sin a\pi\,(-1)^n}{n-a}-\frac{\sin a\pi\,(-1)^n}{n+a}\right)=\frac{(-1)^{n+1}}{\pi}\left(\frac{1}{n-a}+\frac{1}{n+a}\right)$$

ואחרי מכנה משותף, נקבל:

$$b_n=\frac{(-1)^{n+1}\,2n}{\pi\left(n^2-a^2\right)}$$

כעת, בשביל הסכום שאנו רוצים לחשב אנו צריכים להעלות את המקדמים בריבוע, ולכן נשתמש בשוויון פרסבל:

$$\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|^2=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|g(x)|^2\,dx$$

כלומר:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}\,2n}{\pi\left(n^2-a^2\right)}\right|^2=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin^2 ax}{\sin^2 a\pi}dx$$

ואם נסדר:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\left(n^2-a^2\right)^2}=\frac{\pi}{2\sin^2 a\pi}\int_{0}^{\pi}\sin^2 ax dx$$

נשתמש בזהות: $\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}$ כדי לחשב את האינטגרל, ובסופו של דבר נקבל:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\left(n^2-a^2\right)^2}=\frac{\pi}{2\sin^2 a\pi}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\sin 2a\pi}{4a}\right)$$

3. טור פורייה הוא ליניארי, כלומר הטור של ההפרש הוא הפרש הטורים. אם מסדרים קצת יוצא:

$$f(x)-g(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2a^2(-1)^n}{\pi n\left(n^2-a^2\right)}\sin nx$$

נראה לי. בכל אופן, $f-g$ היא פונקציה גזירה כמה פעמים שנרצה, ובקצוות הערכים שווים:

$$f(\pi)-g(\pi)=f(-\pi)-g(-\pi)=0$$

ולכן הטור מתכנס במ"ש.