תירגול 9

9 בדצמבר 2013

מרחב מכפלה פנימית

דוגמא:
$V=\mathbb{R}^3$ מעל $\mathbb{R}$ המכפלה הסקלארית מוגדרת להיות
$$<x,y>=<(x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)>:=\sum_{i=1}^{3}x_iy_i=x^ty$$
הגדרה: יהיה Vמרחב וקטורי מעל $K=\mathbb{R}\backslash\mathbb{C}$ אזי מכפלה פנימית הינה פונקציה המתאימה לכל זוג וקטורים $v,u\in V$ סקלאר מ K (כלומר $\langle\ ,\ \rangle:V\times V\to K$) ומקיימת את האקסיומות הבאות:

1. לינאריות ברכיב הראשון לכל $\alpha\in K,\ v,u,w\in V$
   (א) $<\alpha v,w>=\alpha<v,w>$
   (ב) $<v+u,w>=<v,w>+<u,w>$
   בקיצור $<\alpha v+u,w>=\alpha<v,w>+<u,w>$
2. הרמנטיות לכל $v,u\in V$ מתקיים $<v,u>=\overline{<u,v>}$.
   (אם $K=\mathbb{R}$ זה אומר סימטריות $<v,u>=<u,v>$)
3. אי־שליליות לכל $v\in V$ מתקיים
   (א) $<v,v>\geq 0$ (מתכונה 2 נובע כי $<v,v>=\overline{<v,v>}$ ולכן $<v,v>\in\mathbb{R}$).
   (ב) $v=0\Leftrightarrow<v,v>=0$

טרמינולוגיה: V יקרא מרחב מכפלה פנימית (ממ"פ)
תכונות:

1. כמעט לינאריות ברכיב השני: $<v,\alpha u+w>=\bar{\alpha}<v,u>+<v,w>$
   הוכחה:
$$<v,\alpha u+w>=\overline{<\alpha u+w,v>}=\overline{\alpha<u,v>+<w,v>}$$
$$=\bar{\alpha}\overline{<u,v>}+\overline{<u,v>}=\bar{\alpha}<v,u>+<v,w>$$

2. הכללה: $<\sum_{i=1}^{n}\alpha_iv_i,\sum_{j=1}^{m}\beta_jw_j>=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\alpha_i\bar{\beta}_j<v_i,w_j>$ (תרגיל)

3. לכל $v \in V$ מתקיים $< 0, v >=< v, 0 >= 0$
הוכחה: $< 0, v >=< 0+0, v >=< 0, v > + < 0, v > \Leftarrow < 0, v >= 0$

דוגמאות למכפלות פנימיות:

1. $V = \mathbb{R}^n$ מעל $\mathbb{R}$ המכפלה הסקלארית מוגדרת להיות
$< x, y >=< (x_1, \dots x_n), (y_1, \dots y_n) >:= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = x^t y$.

2. $V = \mathbb{C}^n$ מעל $\mathbb{C}$ נגדיר מכפלה פנימית להיות
$< z, w >=< (z_1, \dots z_n), (w_1, \dots w_n) >:= \sum_{i=1}^{n} z_i \bar{w}_i = z^t \bar{w}$.

תרגיל: עבור $n = 3$ חשב את המכפלה הפנימית של $v = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 2 \end{pmatrix}$ עם

(א) $v_1 = \begin{pmatrix} -i \\ -4 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$

פתרון: $< (1, i, 2), (-i, -4, \sqrt{2}) >= 1 \cdot i + i \cdot (-4) + 2 \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{2} - 3i$

(ב) $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix}$

פתרון: $< (1, i, 2), (1, -i, 0) >= 1 \cdot 1 + i \cdot (i) + 2 \cdot 0 = 0$

(ג) $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 2 \end{pmatrix}$.

פתרון: $< (1, i, 2), (1, i, 2) >= 1 \cdot 1 + i \cdot (-i) + 2 \cdot 2 = 6$

(ד) $\begin{pmatrix} -4-i \\ -4-12i \\ \sqrt{2}-16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i \\ -4 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix} - 8 \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 2 \end{pmatrix}$

פתרון: $\begin{pmatrix} -4-i \\ -4-12i \\ \sqrt{2}-16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i \\ -4 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix} - 8 \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 2 \end{pmatrix}$ ולכן לפי תכונות מכפלה פנימית נקבל:

$$
\begin{aligned}
&< (-4-i, -4-12i, \sqrt{2}-16), (1, i, 2) >=< v_1 + 4v_2 - 8v_3, v > \\
&=< v_1, v > +4 < v_2, v > -8 < v_3, v >= \\
&= (2\sqrt{2} - 3i) + 4 \cdot 0 - 8 \cdot 6 = -48 + 2\sqrt{2} - 3i
\end{aligned}
$$

3. $V = \mathbb{R}^{n \times n}$. לכל $A, B \in V$ נגדיר $< A, B >= trace(AB^t)$.
טענה: זאת מכפלה פנימי.
הוכחה:

(א)

$$< \alpha A+B,C >= trace((\alpha A+B)C^t) = trace(\alpha AC^t + BC^t)$$
$$= trace(\alpha AC^t) + trace(BC^t) = \alpha trace(AC^t) + trace(BC^t)$$
$$= \alpha < A,C > + < B,C >$$

(ב) $< A,B >= trace(AB^t) = trace((AB^t)^t) = trace(BA^t) =< B,A >$

(ג) מחישוב ישיר נקבל ש $< A,A >= trace(AA^t) = \sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{s=1}^{n}(A_{ks})^2 \geq 0$ ושיוון אמ"מ $A=0$.

4. $V = \{f : [-1,1] \to \mathbb{C} \mid \text{f is continuous function } \}$ מרחב הפונקציות הרציפות מהקטע $[-1,1]$ ל $\mathbb{C}$ מעל $\mathbb{C}$.

נגדיר $< f,g >:= \int\limits_{-1}^{1} f(x)\overline{g(x)}\,dx$.

טענה: זאת מכפלה פנימית.

הוכחה:

(א)

$$< \alpha f+g,h >= \int_{-1}^{1}(\alpha f(x)+g(x))\overline{h(x)}\,dx =$$
$$\alpha\int_{-1}^{1} f(x)\overline{h(x)}\,dx + \int_{-1}^{1} g(x)\overline{h(x)}\,dx = \alpha < f,h > + < g,h >$$

(ב) $< f,g >= \int\limits_{-1}^{1} f(x)\overline{g(x)}\,dx = \int\limits_{-1}^{1} \overline{\overline{g(x)\overline{f(x)}}}\,dx = \overline{\int\limits_{-1}^{1} g(x)\overline{f(x)}\,dx} = \overline{< g,f >}$

(ג) $< f,f >= \int\limits_{-1}^{1} f(x)\overline{f(x)}\,dx = \int\limits_{-1}^{1} |f(x)|^2\,dx \geq 0$
וקיים שיוויון אמ"מ $f=0$ (כי f רציפה).

תרגיל: חשב $< \sin(x),\cos(x) >$

פתרון: $< \sin(x),\cos(x) >= \int\limits_{-1}^{1}\sin(x)\cos(x)\,dx = \int\limits_{-1}^{1}\frac{\sin(2x)}{2}\,dx = 0$.

נורמה

יהי Vמרחב וקטורי מעל $K = \mathbb{R}\backslash\mathbb{C}$אזי נורמה ($||\cdot||$) היא פונקציה המתאימה לכל וקטור מספר ממשי אי שלילי ($||\cdot|| : V \to \mathbb{R}$) המקיימת את האקסיומות הבאות לכל $\alpha \in K,\ v,u \in V$:

1. $||v|| \geq 0$ ושיוון אמ"מ $v=0$.
2. $||\alpha v|| = |\alpha| \cdot ||v||$
3. אי שיוון המשולש: $||v+u|| \leq ||v|| + ||u||$

הערה: מועיל לחשוב על נורמה כפונקציה המודדת אורך/גודל של וקטור.

בהינתן V ממ"פ אזי נגדיר נורמה כך: לכל $v \in V$ $||v|| := \sqrt{<v,v>}$
(מוגדר כי $<v,v> \geq 0$).
עובדה (תרגיל): זה אכן נורמה. היא נקראת הנורמה המושרת מהמכפלה הפנימית.
דוגמא: $V=\mathbb{C}^n$ עם מכפלה פנימית $<z,w>=z^t\bar{w}$
אזי הנורמה המושרת היא $||z|| = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} z_i\bar{z_i}} = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} |z_i|^2}$.

אי שיוון קושי שוורץ:

יהי V ממ"פ.
אזי לכל $x,y \in V$ מתקיים $|<x,y>| \leq ||x|| \cdot ||y||$. כאשר $||\cdot||$ הינה הנורמה המושרת.
הוכחה: יהיו $x,y \in V$ אם $x=0$ או $y=0$ טריוואלי כי שני הצדדים שווים ל־0 .
לכן נניח $x,y \neq 0$. נגדיר $\mu = \lambda <x,y>$. כאשר $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
0 &\leq ||x+\mu y||^2 = <x+\mu y, x+\mu y> = \\
&= <x,x> + \mu <y,x> + \bar{\mu} <x,y> + \mu\bar{\mu} <y,y> \\
&= ||x||^2 + \lambda <x,y><y,x> + \overline{\lambda <x,y>} <x,y> + |\mu|^2 \cdot ||y||^2 \\
&= ||x||^2 + \lambda <x,y> \overline{<x,y>} + \lambda \overline{<x,y>} <x,y> + |\lambda <x,y>|^2 |y||^2 \\
&= ||x||^2 + 2\lambda |<x,y>|^2 + \lambda^2 |<x,y>|^2 ||y||^2
\end{aligned}$$

קיבלנו פולינום מדרגה 2 (λהמשתנה) שגדול שווה 0 ולכן הוא נמצא מעל ציר x (ייתכן שנוגע בו) ולכן יש לו לכל היותר שורש אחד. (תזכורת עבור פולינום $ax^2+bx+c=0$ השורשים שלו הן $\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ ואם יש לו לכל היותר שורש אחד אזי $b^2-4ac \leq 0$). במקרה שלנו $4|<x,y>|^4 - 4||x||^2||y||^2|<x,y>|^2 \leq 0 \Leftarrow |<x,y>|^2 - ||x||^2||y||^2 \leq 0$
$\Leftarrow |<x,y>| \leq ||x||||y||$ ■
תרגיל: יהיו $a_1,\dots a_n \in \mathbb{R}$ הוכח: $(a_1+\dots+a_n)^2 \leq n(a_1^2+\dots+a_n^2)$.
פתרון: נסתכל ב $V=\mathbb{R}^n$ עם המכפלה הסקלארית. נגדיר $x=(a_1,\dots a_n)$, $y=(1,\dots,1)$ אזי לפי אי שיוון קושי שוורץ מתקיים: $|<x,y>|^2 \leq ||x||^2 \cdot ||y||^2$ כלומר $|(a_1+\dots+a_n)^2| \leq n(a_1^2+\dots+a_n^2)$.■
הערה כללית המקבילית (בש.ב.) יהא V ממ"פ $x,y \in V$ אזי מתקיים $2(||x||^2+||y||^2) = ||x+y||^2 + ||x-y||^2)$ (

וקטורים ניצבים ומרחב ניצב

הגדרות: יהי Vממ"פ (עם נורמה מושרת). $v,u\in V$ $S\subset V$ תת קבוצה.

1. הזווית בין vל u מוגדרת להיות $\cos(\theta):=\frac{<u,v>}{||u||\cdot||v||}$.
2. v,u יקראו ניצבים/מאונכים/אורתוגונאליים אם $<v,u>=0$ (מסומן $v\perp u$). {למשל הקבוצה $(0,4,0)\,,(0,0,-11)$}
3. S תקרא אורתוגונלית אם כל שני וקטורים ב S ניצבים זה לזה.
4. התת מרחב הניצב ל Sמוגדר להיות $S^{\perp}:=\{v\in V\,|\,\forall u\in S:<v,u>=0\}$. (תרגיל $S^{\perp}$ הינו תת מרחב. תרגיל: $S^{\perp}=[span(S)]^{\perp}$) {למשל $(0,0,1)^{\perp}$ זה מישור xy}
5. v יקרא נורמלי אם $||v||=1$ (הגודל שלו 1). {למשל $(0,0,1)$}
6. עבור $v\neq0$ התהליך/מעבר $v\to\frac{v}{||v||}$ נקרא נירמול (תרגיל: הגודל של $\frac{v}{||v||}$ הוא 1) .
7. S תקרא אורתונורמלית אם S אורתוגנליים וכל וקטור ב Sהוא נורמלי. {למשל הקבוצה $(0,1,0)\,,(0,0,1)$}

תרגיל: תהא $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$ אזי $[R(A)]^{\perp}=N(A)$

הוכחה: $(\supseteq)$יהא $x\in N(A)$. $\Leftarrow Ax=0$. כלומר $x=0$ $\begin{pmatrix} - & \vec{R_1}(A) & - \\ - & \vdots & - \\ - & \vec{R_m}(A) & - \end{pmatrix}$ ולכן לכל i $x\in[R(A)]^{\perp}\Leftarrow<R_i(A),x>=R_i(A)\cdot x=0$.

$(\subseteq)$ יהא $x\in[R(A)]^{\perp}$. אזי לכל i $Ax=0\Leftarrow<R_i(A),x>=R_i(A)\cdot x=0$. $\Leftarrow$ $x\in N(A)$.

תרגיל: יהיו $\in\mathbb{R}$ $u=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},v=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$. $S=\{u,v\}$ מצא בסיס ל $S^{\perp}$

פתרון: נגדיר $A=\begin{pmatrix}1&1&2\\1&1&0\end{pmatrix}\Leftarrow S^{\perp}=N(A)$ (לפי תרגיל קודם) . נדרג $\begin{pmatrix}1&1&2\\1&1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&2\\0&0&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$. נציב $y=t$ ונקבל $N(A)=\{\begin{pmatrix}-t\\t\\0\end{pmatrix}\}$ ובסיס הוא $\{\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\}$

הערה: הוכחתם כי $B_R\cup B_N$ בסיס ל $\mathbb{R}^3$ ולכן היה צפוי שמספר האיברים בבסיס של $N(A)$ הוא 1