

מבחן בקורס הכנה למתמטיקה לקראת שנת תש"פ

מרצה: דר' ארז שיינר. תאריך: 15/09/19

הוראות: יש לפתור כמה שיותר שאלות ולנמק היטב. כל שאלה שווה 17 נקודות. בהצלחה (=)

1. נגדיר את הפונקציות

$$g(x) = \begin{cases} 2x & x > 1 \\ 0 & x = 1 \\ -x^2 & x < 1 \end{cases} \quad f(x) = \begin{cases} x & x > 1 \\ x^2 + 1 & x \leq 1 \end{cases}$$

מצאו לאילו ערכי x מתקיים אי השוויון $g(f(x)) > f(x)$

2. א. מצאו את כל הפתרונות $z \in \mathbb{C}$ למשוואה $z^6 = (1+i)^6$

ב. מצאו את כל הפתרונות $z \in \mathbb{C}$ למשוואה $z^2 - 2iz - 1 = 0$ (רמז: חשבו את $(z-i)^2$)

3. מצאו שני וקטורים $u, v \in \mathbb{R}^3$ $0 \neq u, v$ במרחב המאונכים זה לזה וגם מקיימים כי

$$(u+2v) \perp (u-2v) \quad (\text{כלומר הוקטורים } u+2v, u-2v \text{ מאונכים זה לזה.})$$

4. הוכיחו באינדוקציה כי לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$

5. פתרו את האינטגרל $\int \sin(\sqrt{x}) dx$

6. הגדרה: תהי קבוצת מספרים $A \subseteq \mathbb{R}$. מספר $m \in \mathbb{R}$ נקרא חסם מלעיל של A אם

$$\forall a \in A : a \leq m$$

א. נסחו תנאי השקול לכך ש m אינו חסם מלעיל של הקבוצה A .

ב. קבעו והוכיחו לכל זוג האם המספר הנתון m הוא חסם מלעיל של הקבוצה הנתונה:

$$m = 4$$

$$m \in \mathbb{N}$$

$$m = 1$$

$$C = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 9\}$$

$$B = \mathbb{N}$$

$$A = \emptyset$$

7. הוכיחו/הפריכו את הטענות הבאות:

א. לכל שלוש קבוצות A, B, C מתקיים $A \setminus (B \setminus A) = A \setminus (C \setminus A)$

ב. לכל שלוש קבוצות A, B, C מתקיים $(A \cap B) \setminus C = A \setminus (B \cap C)$