בדידה (88195), סמטסטר קיץ תשפ,מועד ב' -פתרון

מרצים: מר אחיה בר-און, גברת תמר בר-און, מר בארי גרינפלד, מר אלעד עטייא, ד"ר ארז שיינר
מתרגלים: אחיה בר-און, תמר בר-און, אריאל ויצמן, יפעת חדד, עוזי חרוש, עומר נטר, גלעד פורת-קורן, הראל רוזנפלד, אושרית שטוסל.
אורך המבחן: 3 שעות.
חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד.
הנחיות:

- יש לענות על **כל** 6 השאלות .
- סך הנקודות במבחן הוא 106. ציון מעל 100 יעוגל ל 100 (חלק א 70 נקודות וחלק ב 36 נקודות)
- נמקו תשובתכם היכן שנדרש.

חלק א

1. נתונה הפונקציה $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ ע"י $f(x)=x^2-4x+3$ ונתונה הקבוצה $A=\{2,3\}$

(א) מצאו קבוצה סופית B עבורה $f[A\triangle B]\neq f[A]\triangle f[B]$. אם אין קבוצה כזאת - הוכיחו זאת.
פתרון: בחישוב ישיר $f(3)=0$ ולמשוואה $x^2-4x+3=0=(x-3)(x-1)$ יש את הפתרונות $1,3$. נגדיר את $B=\{1\}$ ונקבל כי

$$f[A\triangle B]=f[\{1,2,3\}]=\{f(1),f(2),f(3)\}=\{0,-1,0\}=\{0,-1\}$$

אבל

$$f[A]\triangle f[B]=f[\{2,3\}]\triangle f[\{1\}]=\{0,-1\}\triangle\{0\}=\{-1\}$$

ולכן B מקיימת את הדרוש בסעיף.

(ב) מצאו קבוצה סופית B עבורה $f[A\cap B]\neq f[A]\cap f[B]$. אם אין קבוצה כזאת - הוכיחו זאת.
פתרון: גם פה נגדיר את $B=\{1\}$ ונקבל כי

$$f[A\cap B]=f[\emptyset]=\emptyset$$

אבל

$$f[A]\cap f[B]=f[\{2,3\}]\cap f[\{1\}]=\{0,-1\}\cap\{0\}=\{0\}$$

ולכן B מקיימת את הדרוש בסעיף.

(ג) מצאו קבוצה סופית B עבורה $f[A\backslash B]\neq f[A]\backslash f[B]$. אם אין קבוצה כזאת - הוכיחו זאת.
פתרון: גם פה נגדיר את $B=\{1\}$ ונקבל כי

$$f[A\backslash B]=f[\{2,3\}]=\{0,-1\}$$

אבל

$$f[A]\backslash f[B]=f[\{2,3\}]\backslash f[\{1\}]=\{0,-1\}\setminus\{0\}=\{-1\}$$

ולכן B מקיימת את הדרוש בסעיף.

2. נגדיר $A=\{0,1,2\}\times\mathbb{N}$ ויהא S יחס על A. נגדיר יחס T על A ע"י הכלל

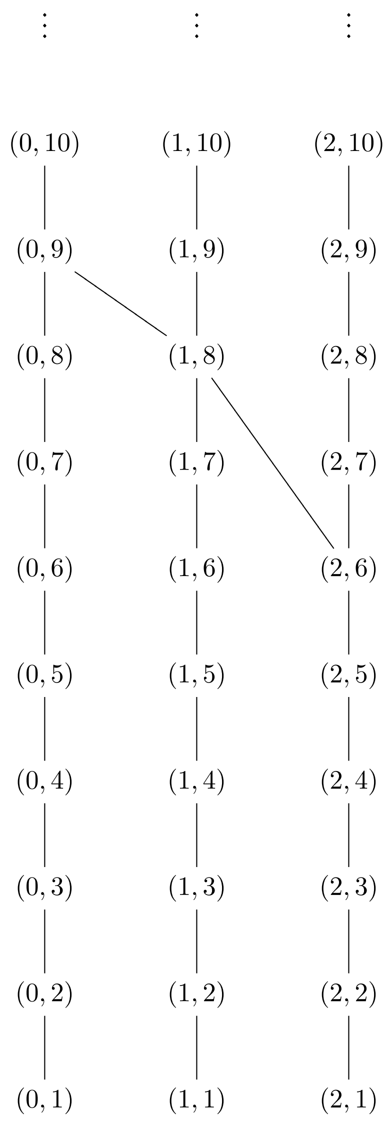
$$(a,b)\,T\,(c,d) \iff ((a=c)\wedge(b<d))$$

ונגדיר את היחס $R=T\cup S$. נתון כי R יחס סדר על A וגם ש $T\cap S=\emptyset$. עוד נתון ש $(1,8)\,S\,(2,6)$ ו $(0,9)\,S\,(1,8)$.

(א) חשבו את העוצמה המינימאלית האפשרית של הקבוצה

$$\{((a,b),(c,d))\in S \mid d=9\}$$

פתרון: דיאגרמת האסה החלקית שניתן לצייר לפי הנתונים של השאלה הם



כאשר T הוא ה"ישרים האנכים" ונתון שב S יש את שני הקווים באלכסון. כיוון ש R יחס סדר אזי $I_A\subseteq R$ ו מכיוון ש $T\cap S=\emptyset$ ו $T\cap I_A=\emptyset$ נקבל ש $I_A\subseteq S$ (שהרי $R=T\cup S$) ובפרט

$$((0,9),(0,9)),((1,9),(1,9)),((2,9),(2,9))\in S$$

בנוסף מכיוון ש R טרנזיטיבי נובע כי

$$\{((1,x),(0,9)) \mid 1\leq x\leq 8\}\cup\{((2,x),(0,9)) \mid 1\leq x\leq 6\}\subseteq S$$

כעת אם נחשוב על הדיאגרמה לעיל כדיאגרמת הסה של R (המלאה!) נקבל ש

$$\begin{aligned}\{((a,b),(c,d))\in S \mid d=9\} = \{((0,9),(0,9)),((1,9),(1,9)),((2,9),(2,9))\}\cup\\ \{((1,x),(0,9)) \mid 1\leq x\leq 8\}\cup\{((2,x),(0,9)) \mid 1\leq x\leq 6\}\end{aligned}$$

(ב) האם ייתכן כי S יחס טרנזיטיבי?
פתרון: כן. בגלל ש $R=T\cup S$ טרנזיטיבי וב T אין קווים בין טורים שונים (כלומר בין איברים מהצורה $(1,*)$ ל $(2,*)$ או ל $(0,*)$) נקבל מהנתון ש $(1,8)\,S\,(2,6)$ ו $(0,9)\,S\,(1,8)$ כי ב S חחבייים להיות גם הזוגות

$$\begin{aligned}\{((2,x),(1,y)) \mid 1\leq x\leq 6,\ 8\leq y\}\cup\{((1,x),(0,y)) \mid 1\leq x\leq 8,\ 9\leq y\}\\ \cup\{((2,x),(0,y)) \mid 1\leq x\leq 6,\ 9\leq y\}\end{aligned}$$

כאשר הקבוצה האחרונה נוספה מכיוון ש $(0,9)\,S\,(2,6)$ (בגלל טרנזיטיביות של S). כעת אם נגדיר

$$\begin{aligned}S=&\{((2,x),(1,y)) \mid 1\leq x\leq 6,\ 8\leq y\}\\ &\cup\{((1,x),(0,y)) \mid 1\leq x\leq 8,\ 9\leq y\}\\ &\cup\{((2,x),(0,y)) \mid 1\leq x\leq 6,\ 9\leq y\}\\ &\cup I_A\end{aligned}$$

נקבל כי S יחס סדר ובפרט טרנזיטבי שעונה על דרישות השאלה.

(ג) נסמן ב C את קבוצת חסמי המלרע (לפי R) של תת הקבוצה

$$\{(1,y) \mid y\geq 8\}$$

(תת קבוצה של A). מצאו את העוצמה האפשרית המינימאלית של C. אם העוצמה אינסופית, הוכיחו זאת.
פתרון: בהנחה שעקבתם אחרי הסעיפים הקודמים, רואים מדיאגרמת הסה כי התשובה היא

$$\{(1,x) \mid 1\leq x\leq 8\}\cup\{(2,x) \mid 1\leq x\leq 6\}$$

אלו חייבים להיות חסמי מלרע והדוגמה שמסעיף א מראה שאלו הם בדיוק.

(ד) מצאו את העוצמה האפשרית המקסמאלית של C מסעיף קודם. אם העוצמה אינסופית, הוכיחו זאת.
פתרון: התשובה היא שהעוצמה יכולה להיות אינסופית, למשל אם ב S יש את הזוגות

$$\{((2,x)\,(1,8)) \mid x\in\mathbb{N}\}$$

אזי נתוני השאלה מתקיימים אבל "הטור השמאלי" כולו נמצא "מתחת" ל $(1,8)$ ולכן כל איבר בטור זה מהווה חסם מלרע ל $\{(1,y) \mid y\geq 8\}$ (שהרי $(1,8)$ קטן שווה מכולם ולכן אם איבר קטן שווה ממנו הוא חסם מלרע של הקבוצה $\{(1,y) \mid y\geq 8\}$).

3. לכל n טבעי נגדיר את הקבוצה $A_n=\{n\cdot k \mid k\in\mathbb{N}\}$

(א) כתבו את האיברים שבקבוצה $\{t\in\mathbb{N} \mid A_4\cup A_{21}\subseteq A_t\}$.
פתרון: נשים לב כי A_n זה כל הכפולות הטעיות של n ובפרט $n\in A_n$. כעת עבור t המקיים כי $A_4\cup A_{21}\subseteq A_t$ מתקיים כי $A_4\subseteq A_t$ וגם $A_{21}\subseteq A_t$(כיוון ש $A_4A_{21}\subseteq A_4\cup A_{21}$ והכלה היא טרנזיטבית). מכיוון ש

$$4\in A_4, 21\in A_{21}$$

נקבל כי $4,21\in A_t$ ובפרט $4,21$ הם כפולה של t או במילים אחרות $t|4,21$ ולכן $t=1$. מצד שני עבור $t=1$ מתקיים כי $A_t=A_1=\mathbb{N}$ ולכן $A_4\cup A_{21}\subseteq\mathbb{N}$. לסיכום $\{t\in\mathbb{N} \mid A_4\cup A_{21}\subseteq A_t\}=\{1\}$.

(ב) לכל n טבעי נגדיר בנוסף את הקבוצות $B_n = A_{11n} \cap A_{12n}$. כתבו את האיברים שבקבוצה

$$\{x \in \cup_{n=2}^{\infty} B_n \mid 1320 < x < 1980\}$$

פתרון: טענה: לכל n מתקיים כי $B_n = A_{11n} \cap A_{12n} = A_{132n}$. הוכחה ע"י הכלה דו-כיוונית:
$(\subseteq)$יהא $x \in A_{11n} \cap A_{12n}$ אזי קיימים k_1, k_2 טבעיים כך ש $x = 11n \cdot k_1$ וגם $x = 12n \cdot k_2$ ולכן $12n \cdot k_2 = 11n \cdot k_1$ ולכן $12 \cdot k_2 = 11 \cdot k_1$ ולכן k_2 מתחלק ב 11 ו k_2 מתחלק ב 11 (זכרו: לכל מספר טבעי יש פירוק לגורמים ראשוניים ול 11ו 12 אין גורם ראשוני משותף) לכן קיימים k_1', k_2' טבעיים כך ש $k_2 = 11k_2', k_1 = 12k_1'$ ולכן

$$x = 12n \cdot k_2 = 12n \cdot 11k_2' = 132n \cdot k_2'$$

ובפרט $x \in A_{123n}$ כי הוא כפולה של 132 .
$(\supseteq)$יהא $x \in A_{132n}$ אזי קיים k טבעי כך ש $x = 132n \cdot k$ ולכן x כפולה של $11n$ וגם של $12n$ ובפרט $x \in A_{11n}$ וגם $x \in A_{12n}$ ולכן $x \in A_{11n} \cap A_{12n}$.
כעת $\cup_{n=2}^{\infty} B_n = \cup_{n=2}^{\infty} A_{132n}$ ולכן:
טענה $\cup_{n=2}^{\infty} A_{132n} = A_{132} \backslash \{132\}$. הוכחה: $(\subseteq)$יהא $x \in \cup_{n=2}^{\infty} A_{132n}$ ולכן קיים $2 \leq n$ טבעי כך ש $x \in A_{132n}$ ולכן x הוא כפולה של $132n$ ובפרט כפולה של 132 ולא שווה ל 132(שהרי $n \neq 1$). $(\supseteq)$ יהא $x \in A_{132} \backslash \{132\}$ אזי $x \neq 132$ הוא כפולה של 132 ולכן קיים $2 \leq n$ טבעי כך ש $x = 132n$ ולכן $x \in A_{132n} \subseteq \cup_{n=2}^{\infty} A_{132n}$.
מסקנה

$$\{x \in \cup_{n=2}^{\infty} B_n \mid 1320 < x < 1980\} = \{132k \mid k \in \{11, 12, 13, 14\}\}$$

(בגלל $1320 = 132 \cdot 10$ ו $1980 = 132 \cdot 15$).

(ג) נסמן ב $\mathbb{P}$ את קבוצת כל המספרים הראשוניים הטבעיים (הערה: המספר 1 אינו ראשוני). מצאו איבר השייך לקבוצה

$$(\cup_{p \in \mathbb{P}} B_p) \cap (\cap_{n \in \mathbb{N}} (\mathbb{N} \backslash B_{3^n}))$$

כאשר B_n הן הקבוצות שהוגדרו בסעיף הקודם.
פתרון: כמו שראינו בסעיף הקודם

$$\cup_{p \in \mathbb{P}} B_p = \cup_{p \in \mathbb{P}} A_{132p}$$

כלומר כל המספרים שהם כפולה של $132p$ עבור איזה שהוא ראשוני p.
טענה $\cup_{p \in \mathbb{P}} A_{132p} = A_{132} \backslash \{132\}$ ולכן בפרט $2 \cdot 132 \in \cup_{p \in \mathbb{P}} B_p$. הוכחה: $(\subseteq)$יהא $x \in \cup_{p \in \mathbb{P}} A_{132p}$ ולכן קיים $2 \leq p$ טבעי ראשוני כך ש $x \in A_{132p}$ ולכן x הוא כפולה של $132p$ ובפרט כפולה של 132 ולא שווה ל 132(שהרי $p \neq 1$). $(\supseteq)$ יהא $x \in A_{132} \backslash \{132\}$ אזי $x \neq 132$ הוא כפולה של 132 ולכן קיים $2 \leq n$ טבעי כך ש $x = 132n$ כיוון ש $2 \leq n$ קיים ראשוני p שמחלק אותו ולכן $x \in A_{132p} \subseteq \cup_{p \in \mathbb{P}} A_{132p}$.
כעת, נחשוב על הטבעיים כקבוצה האוניברסילית (שנעשה משלים ביחס אליה)

$$\begin{aligned}(\cup_{p \in \mathbb{P}} B_p) \cap (\cap_{n \in \mathbb{N}} (\mathbb{N} \backslash B_{3^n})) &= (\cup_{p \in \mathbb{P}} B_p) \cap (\cap_{n \in \mathbb{N}} (B_{3^n})^c) \\ &= (\cup_{p \in \mathbb{P}} B_p) \cap (\cup_{n \in \mathbb{N}} B_{3^n})^c \\ &= (\cup_{p \in \mathbb{P}} B_p) \setminus (\cup_{n \in \mathbb{N}} B_{3^n})\end{aligned}$$

נראה כי $2 \cdot 132 \notin \cup_{n \in \mathbb{N}} B_{3^n}$ ונסיים את התרגיל. אכן, נניח בשלילה ש $2 \cdot 132 \in \cup_{n \in \mathbb{N}} B_{3^n}$ אזי קיים n טבעי כך ש $2 \cdot 132 \in B_{3^n} = A_{132 \cdot 3^n}$ ובפרט קיים k טבעי כך ש $2 \cdot 132 = 132 \cdot 3^n \cdot k$ ואז $2 = 3^n \cdot k$ סתירה (אגף שמאל לא מתחלק ב 3 ואגף ימין כן).

4. יהיו $c_x, c_y \in \mathbb{R}$. נגדיר יחס שקילות R על $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ע"י הכלל

$$(a, b)\, R\, (c, d) \iff \max\{|a - c_x|, |b - c_y|\} = \max\{|c - c_x|, |d - c_y|\}$$

ונתון כי

$$(7, -4)\, R\, (-5, -6)$$

$$(5, -4) \notin [(-5, -6)]_R$$

$$(-1, -6) \notin [(7, -4)]_R$$

(א) מצאו את c_x אם זה אפשרי. אם זה לא אפשרי - הוכיחו זאת.

פתרון: נתחיל באפיון כללי של מחלקת שקילות של (a,b). נסמן

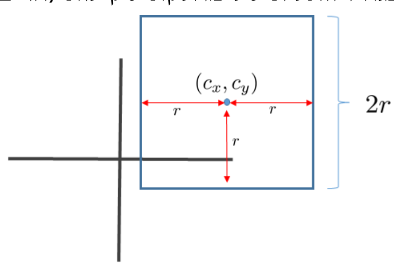
$$r=\max\{|a-c_x|,|b-c_y|\}$$

ואז מתקיים

$$\begin{aligned}[(a,b)]_R &= \{(c,d)\mid (a,b)\,R\,(c,d)\}\\ &= \{(c,d)\mid \max\{|a-c_x|,|b-c_y|\}=\max\{|c-c_x|,|d-c_y|\}\}\\ &= \{(c,d)\mid \max\{|c-c_x|,|d-c_y|\}=r\}\\ &= \{(c,c_y+r),(c,c_y-r)\mid c_x-r\le c\le c_x+r\}\\ &\quad\cup\{(c_x+r,d),(c_x-r,d)\mid c_y-r\le d\le c_y+r\}\end{aligned}$$

שזה מבחינה ויזואלית/גיאומטרית ריבוע שמרכזו ב c_x,c_y, צלעותיו מקבילות לצירים והמרחק מהמרכז לכל אחת מהצלעות הוא r (הצלע עצמה באורך $2r$) כזה: .

איור 1: הצגה ויזואלית של מחלקת שקילות (הריבוע הכחול)



טענה: $c_x=1$. הוכחה: מהנתון $(7,-4)\,R\,(-5,-6)$ נקבל ששתי הנקודות $(7,-4),(-5,-6)$נמצאות על אותו ריבוע. הם לא יכולים להיות על אותו צלע שהרי ערך x שלהם וערך y שונים. האם יכול להיות שהם בצלעות מאונכות? לא! כי אחרת נקבל סתירה לנתונים

$$(5,-4)\notin[(-5,-6)]_R$$

$$(-1,-6)\notin[(7,-4)]_R$$

(כי אחרת, ריבוע שצלעותיו מקבילות לצירים שעובר בנקודות $(7,-4),(-5,-6)$ יעבור גם ב $(5,-4)$ או ב $(-1,-6)$ וכמובן ש $[(7,-4)]=[(-5,-6)]$). לכן $(7,-4),(-5,-6)$בצלעות נגדיות ו c_x מחושב ע"י $-5+\frac{7-(-5)}{2}=-5+6$ (ששוה גם ל $7-+\frac{7-(-5)}{2}=7-6=1$ שזהו חישוב נקודת האמצע של הצלע המאונכת לצלעות שהנקודות $(7,-4),(-5,-6)$ נמצאות בהם.

(ב) נתון בנוסף כי לכל $(a,b)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ קיים $(c,d)\in[(a,b)]_R$ כך ש $c-d=6$. מצאו את c_y אם זה אפשרי. אם זה לא אפשרי - הוכיחו זאת.

פתרון: לפי הנתון, בפרט עבור (c_x,c_y) מתקיים שקיים $(c,d)\in[(c_x,c_y)]_R$ כך ש $c-d=6$ כיוון ש $[(c_x,c_y)]_R=\{(c_x,c_y)\}$ (ראו בשאלה 5 בהמשך) נקבל כי $(c,d)=(c_x,c_y)$ ובפרט .

$$c_x-c_y=6$$

או $c_y=c_x-6=1-6=-5$ (נעיר שאכן $(c_x,c_y)=(1,-5)$ מקיימים את הנתון שבסעיף כי נקודה זאת נמצאת על הישר $x-y=6$ (או $y=x-6$) וכל נקודה (a,b) במישור $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ ניתן למצוא ריבוע שצלעותיו מקבילות לצירים, מרכזו ב $(1,-5)$ כך ששצלעותיו עוברות גם ב (a,b) וגם חותכות את הישר $y=x-6$ ולכן שקולות לאיזה שהיא נקודה על הישר הזה, כלומר שקולות לנקודה (c,d) המקיימת $c-d=6$).

חלק ב

5. נחזור ליחס Rמהשאלה הרביעית.

(א) הוכיחו כי R יחס שקילות.

פתרון: נוכיח

- רפלקסיביות: יהא $(a,b)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ אזי $\max\left\{|a-c_x|,|b-c_y|\right\}=\max\left\{|a-c_x|,|b-c_y|\right\}$ ולכן $(a,b)\,R\,(a,b)$
- סימטריות: נניח $(a,b)\,R\,(c,d)$ ולכן

$$\max\left\{|a-c_x|,|b-c_y|\right\}=\max\left\{|c-c_x|,|d-c_y|\right\}$$

ולכן

$$\max\left\{|c-c_x|,|d-c_y|\right\}=\max\left\{|a-c_x|,|b-c_y|\right\}$$

ולכן $(c,d)\,R\,(a,b)$

- טרנזיטיביות: נניח $(a,b)\,R\,(c,d)$ וגם $(c,d)\,R\,(e,f)$ ולכן

$$\max\left\{|a-c_x|,|b-c_y|\right\}=\max\left\{|c-c_x|,|d-c_y|\right\}$$

וגם

$$\max\left\{|c-c_x|,|d-c_y|\right\}=\max\left\{|e-c_x|,|f-c_y|\right\}$$

ולכן

$$\max\left\{|a-c_x|,|b-c_y|\right\}=\max\left\{|e-c_x|,|f-c_y|\right\}$$

ולכן $(a,b)\,R\,(e,f)$ כנדרש.

(ב) לכל $(a,b)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, מצאו את עוצמת מחלקת השקילות $\left|[(a,b)]_R\right|$ (חלקו למקרים).

פתרון: מתקיים $\left|[(c_x,c_y)]_R\right|=1$ שהרי

$$\begin{aligned}[(c_x,c_y)]_R&=\left\{(a,b)\mid(a,b)\,R\,(c_x,c_y)\right\}\\&=\left\{(a,b)\mid\max\left\{|a-c_x|,|b-c_y|\right\}=\max\left\{|c_x-c_x|,|c_y-c_y|\right\}\right\}\\&=\left\{(a,b)\mid\max\left\{|a-c_x|,|b-c_y|\right\}=0\right\}\\&=\left\{(a,b)\mid|a-c_x|=0\wedge|b-c_y|=0\right\}\\&=\left\{(a,b)\mid a=c_x\wedge b=c_y\right\}\\&=\left\{(c_x,c_y)\right\}\end{aligned}$$

עבור $(a,b)\neq(c_x,c_y)$ נראה כי $\left|[(a,b)]_R\right|=\aleph$ נסמן $r=\max\left\{|a-c_x|,|b-c_y|\right\}$ ונקבל כי $r>0$.

- אם $r=|a-c_x|$ נקבל ש

$$\left\{(a,c_y+s)\mid s\in[0,r)\right\}\subseteq[(a,b)]_R$$

מכיוון שלכל $s\in[0,r)$ מתקיים כי

$$\max\left\{|a-c_x|,|(c_y+s)-c_y|\right\}=\max\left\{r,s\right\}=r$$

ולכן $(a,c_y+s)\in[(a,b)]_R$. מכאן ש $\aleph=|[0,r)|=\left|\left\{(a,c_y+s)\mid s\in[0,r)\right\}\right|\leq\left|[(a,b)]_R\right|$

- אחרת $r=|b-c_y|$ ובאופן דומה נקבל כי $\left\{(c_x+r,b)\mid s\in[0,r)\right\}\subseteq[(a,b)]_R$ ולכן $\aleph\leq\left|[(a,b)]_R\right|$

קיבלנו שבכל מקרה $\aleph\leq\left|[(a,b)]_R\right|$. מצד שני $[(a,b)]_R\subseteq\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ ולכן $\left|[(a,b)]_R\right|\leq|\mathbb{R}\times\mathbb{R}|=\aleph\cdot\aleph=\aleph$ ולפי קש"ב יש שיוון $\left|[(a,b)]_R\right|=\aleph$

(ג) מצאו את עוצמת קבוצת המנה $\left|{}^{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}/_{R}\right|$

פתרון: טענה $\left|{}^{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}/_{R}\right|=\aleph$. הוכחה: מצד אחד

$$\left|{}^{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}/_{R}\right|\leq|\mathbb{R}\times\mathbb{R}|=\aleph\cdot\aleph=\aleph$$

שהרי הפונקציה $f:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to{}^{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}/_{R}$ המוגדרת $f\left(a,b\right)=\left[\left(a,b\right)\right]_{R}$ היא על. מצד שני: טענה: לכל $0\leq r_{1},r_{2}\in\mathbb{R}$ שונים זה מזה מתקיים כי

$$\left[\left(c_{x}+r_{1},c_{y}\right)\right]_{R}\neq\left[\left(c_{x}+r_{2},c_{y}\right)\right]_{R}$$

שהרי אם נניח בשלילה שהמחלקות האלה שוות נקבל כי $\left(c_{x}+r_{1},c_{y}\right)R\left(c_{x}+r_{2},c_{y}\right)$ ולכן

$$\max\left\{ \left|c_{x}+r_{1}-c_{x}\right|,\left|c_{y}-c_{y}\right|\right\} =\max\left\{ \left|c_{x}+r_{2}-c_{x}\right|,\left|c_{y}-c_{y}\right|\right\}$$

אבל בצד שמאל מקבלים r_{1} ובצד ימין r_{2} ששונים זה מזה. סתירה. מסקנה: הפונקציה $f:[0,\infty)\to{}^{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}/_{R}$ המוגדרת $f(r)=\left[\left(c_{x}+r,c_{y}\right)\right]_{R}$ היא חח"ע ולכן

$$\aleph=\left|[0,\infty)\right|\leq\left|{}^{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}/_{R}\right|$$

ואז לפי קש"ב יש שיוויון $\aleph=\left|{}^{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}/_{R}\right|$.

6. נגדיר יחס R על $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ ע"י הכלל: $(f,g)\in R$ אמ"מ $f\circ g=g\circ f$.

(א) הוכיחו/הפריכו: R יחס שקילות.

פתרון: הפרכה: נראה ש R אינו טרנזיטיבי. נגדיר פונקציות $f,g,h:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ ע"י הכללים הבאים:

$$\begin{aligned}f(n) & =n+1\\ g(n) & =n\\ h(n) & =n^{2}\end{aligned}$$

כיוון ש g פונקצית הזהות מתקיים כי $f\circ g=f=g\circ f$ וגם $h\circ g=h=g\circ h$ ולכן $(f,g)\in R,(g,h)\in R$ אבל $(f,h)\notin R$ (ולכן R אינו טרנזיטיבי) שהרי

$$\begin{aligned}f\circ h(n) & =f(h(n))=f(n^{2})=n^{2}+1\\ h\circ f(n) & =h(f(n))=h(n+1)=\left(n+1\right)^{2}\end{aligned}$$

ולמשל $f\circ h(2)=2^{2}+1=5\neq9=\left(2+1\right)^{2}=h\circ f(2)$.

(ב) הוכיחו/הפריכו: קיימת $f\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ כך ש

$$\left|\left\{ g\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\mid(f,g)\in R\right\} \right|=\aleph_{0}$$

פתרון: הוכחה: נגדיר פונקציה $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ ע"י הכלל $f(n)=n+1$ ונראה כי $\left|\left\{ g\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\mid(f,g)\in R\right\} \right|=\aleph_{0}$.

טענה: הפונקציה

$$F:\left\{ g\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\mid(f,g)\in R\right\} \to\mathbb{N}$$

המוגדרת $F(g)=g(1)$ היא חח"ע ועל (ולכן $\left|\left\{ g\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\mid(f,g)\in R\right\} \right|=\left|\mathbb{N}\right|=\aleph_{0}$).

הוכחה:

- F חח"ע: נניח $F(g)=F(\hat{g})$ אזי $g(1)=\hat{g}(1)$. כעת נוכיח כי $g=\hat{g}$ ע"י שנראה באינדוקציה שלכל n טבעי מתקיים ש $g(n)=\hat{g}(n)$. אכן
  * בסיס $n=1$: מתקיים לפי ההנחה.
  * צעד: נניח נכונות עבור n טבעי כלשהוא ונוכיח נכונות עבור $n+1$. לפי הגדרת התחום של F מתקיים כי $(f,g)\in R$ וגם $(f,\hat{g})\in R$ ולכן $f\circ g=g\circ f$ וגם $f\circ\hat{g}=\hat{g}\circ f$ בפרט עבור n מתקיים כי

$$f\circ g(n)=g\circ f(n)$$

$$f\circ\hat{g}(n)=\hat{g}\circ f(n)$$

ומכיוון ש $f\circ g(n)=f(g(n))=g(n)+1$ ו $g\circ f(n)=g(f(n))=g(n+1)$ (ובאופן דומה עבור $\hat{g}$) נקבל כי

$$\begin{aligned}g(n)+1 & =g(n+1)\\ \hat{g}(n)+1 & =\hat{g}(n+1)\end{aligned}$$

ומכיוון שהנחת האינדוקציה אומרת ש $g(n)=\hat{g}(n)$ נקבל כי

$$g(n+1)=g(n)+1=\hat{g}(n)+1=\hat{g}(n+1)$$

כנדרש.

- F על: יהא k מספר טבעי ונגדיר $g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ ע"י הכלל $g(n)=n+k-1$ ואז נקבל כי לכל n טבעי מתקיים ש

$$f\circ g(n)=f(g(n))=g(n)+1=n+k$$

ומצד שני

$$g\circ f(n)=g(f(n))=g(n+1)=n+1+k-1=n+k$$

ולכן $f\circ g=g\circ f$ ולכן $(f,g)\in R$ ומכאן ש g בתחום של F. כעת $F(g)=g(1)=k$ ולכן ל k יש מקור.

(ג) הוכיחו/הפריכו: קיימת תת קבוצה $A\subseteq\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ כך ש $|A|=\aleph$ וגם מתקיים: לכל $f,g\in A$ אם $(f,g)\in A$ אז $f=g$.

פתרון: הוכחה: נגדיר $A=\left\{g\in\{1,2\}^{\mathbb{N}}\mid g(1)=1,g(2)=2\right\}$ מתקיים כי

$$|A|=\left|\{1,2\}^{\mathbb{N}\setminus\{1,2\}}\right|=2^{\aleph_0}=\aleph$$

מכיוון שהפונקציה $F:A\to\{1,2\}^{\mathbb{N}\setminus\{1,2\}}$ המוגדרת $F(g)=g|_{\mathbb{N}\setminus\{1,2\}}$ היא חח"ע ועל (חח"ע שהרי אם $F(g_1)=F(g_2)$ נקבל כי $g_1|_{\mathbb{N}\setminus\{1,2\}}=g_2|_{\mathbb{N}\setminus\{1,2\}}$ ומכיוון ש $g_1(1)=1=g_2(1),g_1(2)=2=g_2(2)$ (לפי הגדרת A) נקבל כי $g_1=g_2$. על כי לכל פונקציה $h\in\{1,2\}^{\mathbb{N}\setminus\{1,2\}}$ מתקיים כי $g=h\cup\{(1,1),(2,2)\}$ נמצאת בתחום של F ומקיימת כי $F(g)=h$).

נשאר להראות שמתקיים: לכל $f,g\in A$ אם $(f,g)\in A$ אז $f=g$. יהיו $f,g\in A$ ונניח כי $(f,g)\in A$ צ"ל כי $f=g$. יהא n טבעי ונראה כי $f(n)=g(n)$. אכן לפי הגדרה, כיוון ש (f,g) מתקיים כי $f\circ g=g\circ f$ ובפרט

$$f\circ g(n)=g\circ f(n)$$

ולכן $f(g(n))=g(f(n))$. מכיוון ש $g(n),f(n)\in\{1,2\}$ ו $g(1)=f(1)=1,g(2)=f(2)=2$ (לפי הגדרת A) נקבל כי

$$g(n)=f(g(n))=g(f(n))=f(n)$$

כנדרש.

במידה ותבחרו להגיש את חלק ב לבדיקה, ייתכן שתוזמנו לשיחת זום קצרה על המבחן (כתבו במקרה זה "עניתי על חלק ב").

במידה ותבחרו לא להגיש את חלק ב לבדיקה, תקבלו עליה 14 נקודות אוטומטית. (כתבו במקרה זה "לא עניתי על חלק ב").