מכפלה קרטזית ויחסים

הגדרה: **המכפלה הקרטזית** של שתי קבוצות A וB הינה אוסף כל ה**זוגות הסדורים** - $A\times B=\{(a,b)|a\in A\wedge b\in B\}$. ההבדל בין זוג סדור לבין קבוצה המכילה זוג איברים היא שהאיברים יכולים להיות שווים בזוג סדור, והסדר שלהם מהותי. כלומר שני האיברים הבאים שונים $(1,2),(2,1)$ והאיבר הבא הינו זוג חוקי $(1,1)$.

ניתן להכליל את ההגדרה לעיל לn-יה סדורה - כלומר n איברים מסודרים.

דוגמא: $A=\{1,2,3\}$ ו$B=\{a,b\}$ אזי מתקיים

$$A\times B=\{(1,a)\ (1,b)\ (2,a)\ (2,b)\ (3,b)\ (3,a)\}$$

תרגיל

הוכיחו או הפריכו:

א. לכל קבוצות A,B,C מתקיים $\overbrace{A\times(B\cap C)}^{*}=\overbrace{(A\times B)\cap(A\times C)}^{*}$

ב. לכל קבוצות A,B,C,D מתקיים: $(A\times B)\cup(C\times D)=(A\cup C)\times(B\cup D)$

פתרון

$A=\{1,2\}\quad B=\{3,4\}\quad C=\{4,5\}$

$* = \{(1,4),(2,4)\}$

$* \ \{(1,3)\ (1,4)\ (2,3)\ (2,4)\}\cap\{(1\,4)\ (1\,5)\ (2\,4)\ (2\,5)\}=\{(1,4)\ (2,4)\}$

א $\quad (x,y)\in A\times(B\cap C)\longleftrightarrow(x\in A)\wedge(y\in B\wedge y\in C)\longleftrightarrow$

$\underbrace{(x\in A\wedge y\in B)}_{\cap\ A\times B}\wedge\underbrace{(x\in A\wedge y\in C)}_{\cap\ A\times C}\longleftrightarrow(x,y)\in(A\times B)\cap(A\times C)$

ב $\quad A=\{1\}\quad B=\{2\}\quad C=\{3\}\quad D=\{4\}$

$A\times B=\{(1,2)\}\qquad C\times D=\{(3,4)\}$

$(A\times B)\cup(C\times D)=\{(1,2)\ (3,4)\}$

$A\cup C=\{1,3\}\quad B\cup D=\{2,4\}$

$(A\cup C)\times(B\cup D)=\{(1\,2)\ (1\,4)\ (3\,2)\ (3\,4)\}$

יחסים - כתת-קבוצה של הזוגות הסדורים

הגדרה: יהיו A,B קבוצות, $R \subseteq A \times B$ יקרא יחס (מ A ל B-). הרעיון שעומד בבסיס של יחס הוא האפשרות "לקשר" בין איברי A ל B. דוגמא: $A = \{1,2,3\}, B = \{0,2,6\}$ ונביט בתת הקבוצה $R \subseteq A \times B$ הבאה: $R = \{(1,2),(1,6),(2,2),(2,6),(3,6)\}$. מה מיוחד בזוגות אלה?

זוגות אלה הינן כל זוגות האיברים (a,b) כך ש $a \leq b$. (כלומר הגדרנו את היחס המייצג "קטן שווה")

הערה: יחס לא חייב לייצג חוקיות מסוימת למשל גם הקבוצה $S = \{(1,2),(1,6),(2,0),(2,2)\}$ היא יחס. גם $\emptyset$ היא יחס. וגם $A \times B$ הוא יחס.

סימון: אם זוג מסוים, (a,b), נמצא בקבוצת היחס R נהוג לסמן aRb. (אם יש משמעות ליחס כמו לעיל ניתן גם לסמן פשוט $a \leq b$.

דוגמא: קבוצת האנשים A. נגדיר יחס "בן של" ע״י קבוצת הזוגות הסדורים $R \subseteq A \times A$ כך ש- $(x,y) \in R \leftrightarrow x$ הוא בן של y (שימו לב למשמעות הכיוון)

תכונות של יחסים על קבוצה

הגדרה: יחס R על קבוצה A פירושו $R \subseteq A \times A$

תהי קבוצה A ויחס R עליה אזי

R 1. R נקרא **רפלקסיבי** אם כל איבר מקיים את היחס עם עצמו (מתקיים $(\forall a \in A : (a,a) \in R$

S 2. R נקרא **סימטרי** אם aRb גורר שגם bRa (מתקיים) $(\forall a,b \in A : [(a,b) \in R \rightarrow (b,a) \in R]$

T 3. R נקרא **טרנזיטיבי** אם יחס בין ראשון לשני, ויחס בין השני לשלישי גורר יחס בין הראשון לשלישי (מתקיים) $(\forall a,b,c \in A : [((a,b) \in R) \wedge ((b,c) \in R) \rightarrow ((a,c) \in R)]$

AS 4. R נקרא **אנטי סימטרי (חלש)** אם aRb וגם bRa גורר כי a=b (מתקיים) $(\forall a,b \in A : [(a,b) \in R \wedge (b,a) \in R \rightarrow a = b]$

דוגמאות:

$=$: R, S, T, AS

$\leq$: R, T, AS $\quad x \leq y \wedge y \leq x \rightarrow y = x$

$<$: T, AS (שקר ריק כל דבר)

שיוויון mod n : R, S, T $\quad 4 \bmod 2 = 2 \bmod 2$

$\subseteq$: R, AS, T

$(a,b)\in R: a|b \quad (2\ 4)$

a|b (על $\mathbb{N}$): R, T, AS

a|b (על $\mathbb{Z}$): T, R

(AS לא) $\left(\frac{-4}{4}\right)=\left(\frac{4}{-4}\right)$

אדם x שמע על y': R

תרגיל

מצאו יחסים על הקבוצה $\{1, 2, 3\}$ עם התכונות הבאות:

- 1 יחס רפלקסיבי
- 2 יחס סימטרי
- 3 יחס אנטי סימטרי
- 4 יחס טרנזיטיבי
- 5 יחס סימטרי ואנטי סימטרי
- 6 יחס טרנזיטיבי וסימטרי
- 7 יחס רפלקסיבי, סימטרי ולא טרנזיטיבי
- 8 עוד לבקשת הקהל

1) $\{(1,1)\ (2,2)\ (3,3)\}$

2) $\{(1\ 2)\ (2\ 1)\}$

3) $\{(1,1)\}$, $\{(1\ 2)\ (2\ 3)\}$

4) $\{(1,2)\ ,(2,3)\ ,(3,1),\ (2,1)\ (1\ 3)\ ,(3\ 2)\ (1,1)\ (2,2)\ (3\ 3)\}$

4: $\{(1\ 2)\ (2\ 3)\ (1\ 3)\}$

5) $\{(2\ 2)\ (3\ 3)\}$ (סימטרי + אנטי
יחס השוויון)

6) $\{(1\ 1)\}$

7) $\{(1\ 1)\ (2\ 2)\ (3\ 3)\}$

יחסי שקילות

הגדרה: תהא A קבוצה ו-R יחס עליה. R יקרא יחס שקילות אם הוא

1. רפלקסיבי
2. סימטרי
3. טרנזיטיבי

דוגמא: תהא $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. נגדיר תת הקבוצות

$A_1 = \{1, 3\}, A_2 = \{2, 4, 5\}, A_3 = \{6\}$

נגדיר יחס R על A כך $\exists 1 \leq i \leq 3 : x, y \in A_i \Leftrightarrow xRy$

טענה R יחס שקילות

הוכחה:

$\bigcap_{i=1}^{3} A_i = \emptyset$

<u>רפלקסיבי:</u> יהי $a \in A$. נשים לב $\bigcup_{i=1}^{3} A_i = A$

$a \in \bigcup_{i=1}^{3} A_i$

$\downarrow$

$\exists 1 \leq i \leq 3 : a \in A_i \longrightarrow aRa$ עפ"י הגדרת R.

<u>סימטרי:</u> יהי $(a,b) \in R \longleftarrow \exists 1 \leq i \leq 3 \ a,b \in A_i$

כיוון שאין חשיבות לסדר האיברים בקבוצה

$a,b \in A_i \longrightarrow (b,a) \in R$

<u>טרנזיטיבי:</u> יהיו $(a,b), (b,c) \in R$ זוגות ביחס R.

$\exists 1 \leq i \leq 3 : a,b \in A_i \wedge \exists 1 \leq j \leq 3 \ b,c \in A_j$

ראינו $A_i \cap A_j \neq \emptyset$ $\forall i \neq j$ (תנאי של A זרות) $\longleftarrow$ $b \in A_i \wedge b \in A_j \Rightarrow i = j$

$\downarrow$

$a,b,c \in A_i \longrightarrow (a,c) \in R$ $\boxed{\checkmark}$

הגדרה: תהא A קבוצה. **חלוקה** של A היא חלוקה של A לקבוצות זרות. באופן פורמלי קיימות תת קבוצות $\{A_i\}_{i \in I}$ כך ש:

- $\forall i \in I : A_i \neq \emptyset$
- $\bigcup_{i \in I} A_i = A$ כלומר האיחוד של כל תתי הקבוצות שווה לקבוצה כולה
- הן **זרות** זו לזו = החיתוך בין כל שתי תתי קבוצות הוא ריק $(\forall i \neq j \in I : A_i \cap A_j = \phi)$

תרגיל

נגדיר על $\mathbb{R}$ ארבעה יחסים Q, R, S, T באופן הבא: לכל $x, y \in \mathbb{R}$:

$xQy \iff x - y = 17$ ✗ לא רפלקסיבי

$xRy \iff x - y \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ✗ רפלקסיבי, סימטרי, $4-3 \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ $3-4 \notin \mathbb{N}\cup\{0\}$

$xSy \iff x - y \in 2\mathbb{Z} \cup 3\mathbb{Z}$. ✗ רפלקסיבי, סימטרי, טרנזיטיבי ✗ $(10,8)$ $(8,5) \to (10,5)$ ✗

$xTy \iff x - y \in \mathbb{Z}$.

בדקו עבור כל אחד מהם האם הוא יחס שקילות.

רפלקסיבי: $\forall x \in \mathbb{R}\ \ x - x = 0 \in \mathbb{Z}$

סימטרי: יהי $(x,y) \in T$ $\quad \exists z \in \mathbb{Z}\ \ x - y = z$

$y - x = -z \in \mathbb{Z} \longrightarrow (y,x) \in T$

טרנזיטיבי: $(x,y), (y,z) \in T$

$\exists a \in \mathbb{Z}\ \ x - y = a \ \wedge\ \exists b \in \mathbb{Z}\ \ y - z = b$

$x - y + y - z = a + b$

$x - z = a + b \in \mathbb{Z} \longrightarrow (x,z) \in T$

מחלקות שקילות וקבוצת המנה

הגדרה:

יהא R יחס שקילות על A אזי

1. לכל $x \in A$ מוגדרת **מחלקת השקילות של x** להיות
$\bar{x} = [x]_R := \{y \in A | (x, y) \in R\}$
2. **קבוצת המנה** מוגדרת $A/R := \{[x]_R | x \in A\}$

$A/_R$

מהן מחלקות השקילות מהדוגמא הקודמת?

$A=\{1,2,3,4,5,6\}$ $A_1=\{1,3\}$ $A_2=\{2,4,5\}$ $A_3=\{6\}$

$xRy \Longleftrightarrow \exists i: x,y \in A_i$

$[1]_R = \{1,3\} = A_1 = [3]_R$

$[2]_R = A_2$

$[6]_R = A_3$

$A/_R = \{A_1, A_2, A_3\}$

משפט: יהא R יחס שקילות על A אזי

1. לכל $x, y \in A$ מתקיים $[x] = [y]$ או $[x] \cap [y] = \phi$ (כלומר מחלקות השקילות זרות)
2. $A = \bigcup_{[x] \in A/R} [x]$ כלומר (איחוד מחלקות השקילות תתן את כל A)

הערה: זה בדיוק אומר שמיחס שקילות ניתן להגיע לחלוקה של A

מסקנה: תהא A קבוצה אזי יש התאמה $\{R$ יחס שקילות על A $\} \leftrightarrow \{$חלוקות של A$\}$

חידוד: מהותו העיקרית של יחס שקילויות הוא לשים לב לשקילות מסוימת בין אברים שונים (כמו שיוויון) ולצמצם את החזרות המיותרות על ידי קיבוץ כל האיברים השקולים לקבוצה אחת.

תרגיל

במה יחסי שקילות שונים יש על $A = \{1,2,3\}$?

$\{\{1\}\ \{2\}\ \{3\}\} = A/R$ $R = \{(1,1)\ (2,2)\ (3,3)\}$

$\{\{1\,2\}\ \{3\}\}$, $\{\{1\,3\}\ \{2\}\}$, $\{\{1,2,3\}\}$

$\{\{3,2\},\{1\}\}$

בגלל שיש 5 חלוקות, יש 5 יחסי שקילות

תרגיל

תהי $A = \{1,2,3\}$ קבוצה. השלם את היחסים הבאים מעליה על מנת שיקיימו את התכונות הנדרשות בשאלה (השלם - כלומר הוסף זוגות סדורים **הכרחיים**):

- השלם את $R = \{(1,2)\}$ להיות יחס סימטרי וטרנזיטיבי. האם אחרי ההשלמה קיבלת יחס שקילות?
- השלם את הקבוצה הריקה ליחס שקילות. איך קוראים ליחס שקיבלת? מהן מחלקות השקילות?

$\{(1\,2)\ (2\,1)\ (1\,1)\ (2\,2)\} \longrightarrow$ לא יחש"ש כי לא רפלקסיבי (חסר (33))

$\{(1\,1)\ (2\,2)\ (3\,3)\} \longrightarrow$ יחס השיוויון $[1]_R = \{1\}$, $[2]_R = \{2\}$, $[3]_R = \{3\}$