<u>תרגיל בית מספר 2</u>

<u>שאלה 1</u>

הוכח שבכל אחד מהמקרים הבאים, אם המכפלה באחד האגפים מוגדרת, אז גם המכפלה באגף השני מוגדרת, ותוצאתן שווה:

א. $(B+C)A = BA + CA$.

ב. $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$ (כאשר $\alpha \in F$).

ג. $A0 = 0$ וכן $0A = 0$.

<u>פתרון</u>

א.

נניח שהכפל באגף שמאל מוגדר ונוכיח שהכפל באגף ימין מוגדר.

החיבור $B+C$ מוגדר ז"א המטריצות B,C מאותו סדר.

נניח ש $B,C \in \mathbb{F}^{m\times n}$ ואז $B+C \in \mathbb{F}^{m\times n}$.

הכפל באגף שמאל מוגדר ולכן מספר העמודות במטריצה $B+C$ שווה למספר השורות במטריצה A ז"א $A \in \mathbb{F}^{n\times l}$. נקבל ש $(B+C)A \in \mathbb{F}^{m\times l}$.

נראה שהכפל באגף ימין מוגדר.

מכיוון ש $B \in \mathbb{F}^{m\times n}$, $A \in \mathbb{F}^{n\times l}$ נקבל שמספר העמודות במטריצה B שווה למספר השורות במטריצה A ולכן הכפל BA מוגדר ו $BA \in \mathbb{F}^{m\times l}$.

באותו אופן הכפל CA מוגדר ו $CA \in \mathbb{F}^{m\times l}$.

קיבלנו שהמטריצות BA, CA מאותו סדר ולכן החיבור מוגדר ומתקיים $BA+CA \in \mathbb{F}^{m\times l}$.

המטריצות $BA+CA$, $(B+C)A$ מאותו סדר.

נראה ש $(B+C)A = BA+CA$.

נסמן $D = B+C$. $d_{ij} = b_{ij} + c_{ij}$.

נסמן $E = DA$ מהגדרת כפל מטריצות נקבל ש

$$e_{ij} = \sum_{k=1}^{n} d_{ik}e_{kj} = \sum_{k=1}^{n}(b_{ik}+c_{ik})e_{kj} = \sum_{k=1}^{n}(b_{ik}e_{kj}+c_{ik}e_{kj}) = \sum_{k=1}^{n} b_{ik}e_{kj} + \sum_{k=1}^{n} c_{ik}e_{kj}.$$

נסמן $F = BA$ ומהגדרת כפל מטריצות נקבל ש $f_{ij} = \sum_{k=1}^{n} b_{ik}a_{kj}$.

נסמן $G = CA$ ומהגדרת כפל מטריצות נקבל ש $g_{ij} = \sum_{k=1}^{n} c_{ik}a_{kj}$.

סה"כ קיבלנו ש $e_{ij} = f_{ij} + g_{ij}$ ולכן מתקיים השוויון $(B+C)A = BA+CA$.

ב.

מכיוון שהכפל AB וכפל בסקלר לא משנה את סדר המטריצה נקבל שגם הכפל $(\alpha A)B, A(\alpha B)$ מוגדר והסדר של המטריצות $(\alpha A)B, A(\alpha B), \alpha(AB)$ זהה.

נסמן $C = AB$ מהגדרת כפל מטריצות נקבל ש $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$.

מהגדרת כפל בסקלר נקבל ש $\alpha\left(a_{ik}b_{kj}\right) = \sum_{k=1}^{n}\alpha\left(a_{ik}b_{kj}\right)$ $\alpha c_{ij} = \alpha\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}$ הוא הרכיב בעמודה ה j בשורה ה i של המטריצה $\alpha\left(AB\right)$.

מהגדרת כפל בסקלר נקבל ש αa_{ij} הוא הרכיב בעמודה ה j בשורה ה i של המטריצה αA.

נסמן $D = \left(\alpha A\right)B$ מהגדרת כפל מטריצות נקבל ש $d_{ij} = \sum_{k=1}^{n}\left(\alpha a_{ik}\right)b_{kj}$.

מהגדרת כפל בסקלר נקבל ש αb_{ij} הוא הרכיב בעמודה ה j בשורה ה i של המטריצה αB.

נסמן $E = A\left(\alpha B\right)$. מהגדרת כפל מטריצות נקבל ש $e_{ij} = \sum_{k=1}^{n}a_{ik}\left(\alpha b_{kj}\right)$.

מאסוציאטיביות חילוף בשדה נקבל ש $e_{ij} = \alpha a_{ij} = d_{ij}$.

ג.

נסמן $C = AO$ מהגדרת כפל מטריצות נקבל ש $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n}a_{ik}o_{kj}$. במטריצת האפס כל הרכיבים הם אפסים ולכן $o_{kj} = 0$ לכל $1 \le j \le m, 1 \le k \le n$ ולכן $a_{ik}o_{kj} = 0$ לכל $1 \le j \le m, 1 \le k \le n$

ואז הסכום $\sum_{k=1}^{n}a_{ik}o_{kj}$ שווה לאפס ולכן c_{ij} וקיבלנו את מטריצת האפס כדרוש.

באותו אופן ניתן להראות ש $0A = 0$.

<u>שאלה 2</u>

חשב את המכפלות הבאות או הסבר מדוע אינן מוגדרות:

א. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

ב. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

ג. $\begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

<u>פתרון</u>

א. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$.

ב. מס' העמודות בשמאלית -2, מס' השורות בימנית – 3 לכן הכפל לא מוגדר.

ג. $\begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 3 \end{pmatrix}$

<u>שאלה 3</u>

א. הכפילו את המטריצות הבאות בשני הסדרים EF ו FE:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & c & 1 \end{pmatrix}$$

.

האם $EF = FE$?

ב. עבור A,B הבאים, חישבו את A^2,A^3,B^2,B^3 והעריכו מה תהיה התוצאה ל A^5,A^n,B^5,B^n:

$B=\begin{pmatrix}1 & b\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ $A=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.

<u>פתרון</u>

א.

$$EF=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ a & 1 & 0\\ b & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & c & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ \mathrm{a} & 1 & 0\\ \mathrm{b} & \mathrm{c} & 1\end{pmatrix}$$

$$FE=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & c & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ a & 1 & 0\\ b & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ a & 1 & 0\\ b+ac & c & 1\end{pmatrix}$$

אם a=0 או c=0 אזי $EF = FE$ אחרת $EF \neq FE$

ב.

$$A^2=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 2\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 4\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$A^3=A^2A=\begin{pmatrix}4 & 4\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 2\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & 8\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$A^5=\begin{pmatrix}2^5 & 2^5\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}32 & 32\\ 0 & 0\end{pmatrix},\quad A^n=\begin{pmatrix}2^n & 2^n\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$B^2=\begin{pmatrix}1 & b\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & b\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2b\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$B^3=B^2B=\begin{pmatrix}1 & 2b\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & b\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3b\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$B^5=\begin{pmatrix}1 & 5b\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad B^n=\begin{pmatrix}1 & nb\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

<u>שאלה 4</u>

תהא $A\in\mathbb{F}^{m\times n}$, ויהא $\alpha\in\mathbb{F}$. הוכח:

א. $(\alpha A)^t=\alpha A^t$.

ב. $(A^t)^t=A$.

<u>פתרון</u>

א. נסמן $B=\alpha A$ ואז $b_{ij}=\alpha a_{ij}$. הרכיב בעמודה ה j ובשורה ה i של B^t הוא $b_{ji}=\alpha a_{ji}$. הרכיב בעמודה ה j ובשורה ה i של A^t הוא a_{ji} ואז הרכיב בעמודה ה j ובשורה ה i של αA^t הוא αa_{ji}.

ב. נסמן $B=A^t$ ואז $b_{ij}=a_{ji}$. הרכיב בעמודה ה j ובשורה ה i של B^t הוא $b_{ji}=a_{ij}$ ואז הרכיב בעמודה ה j ובשורה ה i של A^t הוא a_{ij} ואז $B^t=A$ מכיוון ש $B=A^t$ נקבל ש $\left(A^t\right)^t=A$.

שאלה 5

א. תן דוגמא לשתי מטריצות $A,B\in\mathbb{F}^{3\times 3}$ שעבורן $AB-BA=I$.

ב. תהא $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$ מטריצה, כך ש $tr\left(AA^t\right)=0$. הוכח ש $A=0$.

ג. עבור מטריצה $A\in\mathbb{C}^{m\times n}$, נגדיר את המטריצה A^* ע"י $A^*=\overline{A^t}$.
הוכח שאם $tr\left(AA^*\right)=0$ אז $A=0$.

פתרון

א. נתבונן במטריצות $A,B\in\mathbb{Z}^{3\times 3}$.

ב. נסמן $B=A^t$ ואז $b_{ij}=a_{ji}$. נסמן $C=AB$. על פי הגדרת כפל מטריצות נקבל ש

$$c_{ii}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{ki}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}a_{ik}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}^2 .$$

$tr\left(C\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}a_{ik}^2\right)$ קיבלנו שהעיקבה של המטריצה C היא סכום ריבועי כל רכיבי המטריצה A. נתון ש $tr\left(C\right)=0$ ולכן ריבועי כל רכיבי המטריצה A שווה לאפס.

נתון ש $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$ ומכיוון שסכום ריבועיים של מספרים ממשיים שווה לאפס רק אם כל המספרים אפסים נקבל שכל רכיבי המטריצה A הם אפסים ו $A=0$.

ג. נסמן $B=A^*$ ואז $b_{ij}=\overline{a_{ji}}$. נסמן $C=AB$. על פי הגדרת כפל מטריצות נקבל ש

$$c_{ii}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{ki}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\left|a_{ik}\right|=\sum_{k=1}^{n}\left|a_{ik}\right|^2 .$$

$tr\left(C\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\left|a_{ik}\right|^2\right)$ קיבלנו שהעיקבה של המטריצה C היא סכום ריבועי הערכים המוחלטים של כל רכיבי המטריצה A. נתון ש $tr\left(C\right)=0$ ולכן ריבועי הערכים המוחלטים של כל רכיבי המטריצה A שווה לאפס ומצב כזה ייתכן רק אם כל רכיבי המטריצה שווים לאפס.

שאלה 6

1. פתור המערכות הבאות בשימוש פעולות שורה בסיסיות על המשוואות.

(א) $\begin{aligned} x_1+7x_2&=4\\ -2x_1-9x_2&=2\end{aligned}$ (ב) $\begin{aligned} x_2-4x_3&=8\\ 2x_1-3x_2+2x_3&=1\\ 10x_1-16x_2+14x_3&=2\end{aligned}$.

2. במערכת (א) ציירו את הישרים עבור המשוואות וסמנו את נקודת החיתוך.

פתרון

1א.

$$\begin{aligned} x_1+7x_2&=4\\ -2x_1-9x_2&=2 \end{aligned}$$

$$2R_1+R_2\to R_2$$

$$\begin{aligned} x_1+7x_2&=4\\ 5x_2&=10 \end{aligned}$$

קיבלנו מערכת מדורגת ע"י פעולת שורה בסיסית.

מהמשוואה השנייה נקבל $x_2=2$ ומהמשוואה הראשונה נקבל $x_1=-10$, ולכן התשובה הסופית $(2,-10)$.

1ב.

$$\begin{aligned} x_2-4x_3&=8\\ 2x_1-3x_2+2x_3&=1\\ 10x_1-16x_2+14x_3&=2 \end{aligned}$$

$$R_1\leftrightarrow R_2$$

$$\begin{aligned} 2x_1-3x_2+2x_3&=1\\ x_2-4x_3&=8\\ 10x_1-16x_2+14x_3&=2 \end{aligned}$$

$$-5R_1+R_3\to R_3$$

$$\begin{aligned} 2x_1-3x_2+2x_3&=1\\ x_2-4x_3&=8\\ -x_2+4x_3&=3 \end{aligned}$$

$$R_2+R_3\to R_3$$

$$\begin{aligned} 2x_1-3x_2+2x_3&=1\\ x_2-4x_3&=8\\ 0x_2+0x_3&=11 \end{aligned}$$

קיבלנו משוואה מנוונת, קבוע המשוואה שונה מאפס ולכן אין פתרון למערכת.

<u>שאלה 7</u>

במערכת הבאה, החלף את סימן השאלה במספר כך ש

א. למערכת יש 0 פתרונות.
ב. למערכת יש אינסוף פתרונות.

$$\begin{aligned}3x+2y&=7\\6x+4y&=?\end{aligned}\ .$$

ג. הצב את הערך שקיבלת בסעיף ב ורשום את הפתרון הכללי של המערכת.

<u>פתרון</u>

$$\begin{aligned}3x+2y&=7\\6x+4y&=?\end{aligned}$$

בהינתן מערכת עם שתי משוואות בשני נעלמים $\begin{aligned}a_1x+b_1y&=c_1\\a_1x+b_1y&=c_2\end{aligned}$:

א. אם $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}$ אז למערכת יש 0 פתרונות.

ב. אם $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$ אז למערכת יש אינסוף פתרונות.

התשובה עבור a היא כל מספר השונה מ 14 למשל 1.

התשובה עבור b היא 14.

ג. נציב את הערך שקיבלנו בסעיף קודם במערכת:

$$\begin{aligned}3x+2y&=7\\6x+4y&=14\end{aligned}$$

$$-2R_1+R_2\to R_2$$

$$\begin{aligned}3x+2y&=7\\0x+xy&=0\end{aligned}$$

כדי לקבל פתרון כללי נציב במשוואה הראשונה y=t ואז $x=\frac{7}{3}-\frac{2}{3}t$.

באופן כללי הפתרון הוא: $\begin{pmatrix}\frac{7}{3} & -2t\\ 0 & t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{7}{3}\\ 0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-2\\ 1\end{pmatrix}$

<u>שאלה 8</u>

נתונה מערכת משוואות מעל שדה הממשיים.

$$\begin{cases} x_1+(a-1)x_2-x_3=4 \\ ax_1+(a-1)x_2-x_3=a+3 \\ x_1+(a-1)x_2+(a-3)x_3=7 \end{cases}.$$

א. לאילו ערכים של a יש למערכת פתרון יחיד?

ב. לאילו ערכים של a אין פתרון למערכת?

ג. לאילו ערכים של a יש למערכת אינסוף פתרונות? במקרה זה מצא גם את הפתרון הכללי.

<u>פתרון</u>

$$\begin{cases} x_1+(a-1)x_2-x_3=4 \\ ax_1+(a-1)x_2-x_3=a+3 \\ x_1+(a-1)x_2+(a-3)x_3=7 \end{cases} \xrightarrow[R_3-R_1\to R_3]{R_2-aR_1\to R_2} \begin{cases} x_1+(a-1)x_2-x_3=4 \\ 0x_1+(1-a)(a-1)x_2+(a-1)x_3=-3(a-1) \\ 0x_1+0x_2+(a-2)x_3=3 \end{cases}$$

פתרון יחיד: $a\neq 1,2$.

אין פתרון: כש $a=2$ נקבל מהמשוואה השלישית סתירה ($x_1+0x_2+0x_3=3$) ולכן במצב זה אין פתרון.

אינסוף פתרונות: $a=1$ נקבל מערכת $\begin{cases} x_1+0x_2-x_3=4 \\ 0x_1+0x_2+0x_3=0 \\ 0x_1+0x_2+-x_3=3 \end{cases}$ או אם נחליף את השורות השנייה והשלישית לקבלת צורה מדורגת $\begin{cases} x_1+0x_2-x_3=4 \\ 0x_1+0x_2+-x_3=3 \\ 0x_1+0x_2+0x_3=0 \end{cases}$ וברור שישנם אינסוף פתרונות. המשתנה החופשי הוא x_2 כי x_1 ו- x_3 משתנים מובילים (בצורה המדורגת הם המשתנים הראשונים בשורות הראשונה והשנייה כך שהמקדמים שלהם אינם אפסים) אם נציב $x_2=t$ נקבל שאוסף הפתרונות הוא מהצורה $\{(1,t,-3)\mid t\in R\}$.

<u>שאלה 9</u>

עבור אילו ערכי k למערכת הבאה: א. אין פתרון

ב. יש פתרון יחיד

ג. אינסוף פתרונות

$$x+2y+kz=-1$$
$$x-3z=-3$$
$$2x+ky-z=-4$$

ד. הצב את הערך שקיבלת בסעיף ג ורשום את הפתרון הכללי של המערכת.

<u>פתרון</u>

$$x+2y+kz=-1$$
$$x-3z=-3$$
$$2x+ky-z=-4$$

$$-R_1+R_2\to R_2$$

$$x+2y+kz=-1$$
$$-2y+(-k-3)z=-2$$
$$2x+ky-z=-4$$

$$-2R_1+R_3\to R_3$$

$$x+2y+kz=-1$$
$$-2y+(-k-3)z=-2$$
$$(-4+k)y+(-2k-1)z=-2$$

אם $k=4$ נקבל פתרון יחיד. כעת נבצע את הפעולה $\frac{1}{2}\cdot(k-4)R_2+R_3\to R_3$

$$x+2y+kz=-1$$
$$-2y+(-k-3)z=-2$$
$$-\frac{1}{2}(k+5)(k-2)z=2-k$$

ולכן כאשר k=-5 לא יהיה פתרון, כאשר k=2 יהייה אינסוף פתרונות למשוואה.

ובשאר המקרים נקבל פתרון יחיד.

נציב את הערך שקיהלנו הסעיף הקודם ונקבל:

$$\begin{aligned}x+2y+2z&=-1\\x-3z&=-3\\2x+2y-z&=-4\end{aligned}$$

$$-R_1+R_2\to R_2$$

$$\begin{aligned}x+2y+2z&=-1\\-2y-5z&=-2\\2x+2y-z&=-4\end{aligned}$$

$$-2R_1+R_3\to R_3$$

$$\begin{aligned}x+2y+2z&=-1\\-2y-5z&=-2\\-2y-5z&=-2\end{aligned}$$

$$-R_2+R_3\to R_3$$

$$\begin{aligned}x+2y+2z&=-1\\-2y-5z&=-2\end{aligned}$$

נציב z=t במשוואה השנייה ונקבל $y=-\frac{5}{2}t+1$ ומהמשוואה הראשונה נקבל:

$$x=5t-2-2t-1$$
$$x=3t-3$$

הפתרון הכללי הוא

$$\begin{pmatrix}-3 & 3t\\ 1 & -2.5t\\ 0 & t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\1\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}3\\-2.5\\1\end{pmatrix}$$

<u>שאלה 10</u>

נתונה מערכת משוואות ליניארית הומוגנית של m משוואות ו n נעלמים.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ . \\ . \\ . \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

א. הוכיחו שאם $c = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ הוא פתרון של המערכת, אזי לכל סקלר λ גם λc הוא פתרון.

ב. הוכיחו כי אם $c = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n), d = (\delta_1, \ldots, \delta_n)$ הם פתרונות של המערכת, אזי גם $c + d$ הוא פתרון של המערכת.

ג. הסיקו משני הסעיפים הקודמים כי אם $c = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n), d = (\delta_1, \ldots, \delta_n)$ הם פתרונות של המערכת ו λ_1, λ_2 הם סקלרים כלשהם, אזי גם $\lambda_1 c + \lambda_2 d$ הוא פתרון של המערכת.

ד. הוכיחו או הפריכו: תכונות א,ב,ג מתקיימות גם עבור מערכת משוואות ליניארית לא הומוגנית.

<u>**פתרון**</u>

א. נתון ש- $c = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ הוא פתרון של המערכת $\begin{cases} \alpha_{11}x_1 + \ldots + \alpha_{1n}x_n = 0 \\ \alpha_{21}x_1 + \ldots + \alpha_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ \alpha_{m1}x_1 + \ldots + \alpha_{mn}x_n = 0 \end{cases}$, ולכן

מתקיים $\begin{cases} \alpha_{11}\gamma_1 + \ldots + \alpha_{1n}\gamma_n = 0 \\ \alpha_{21}\gamma_1 + \ldots + \alpha_{2n}\gamma_n = 0 \\ \vdots \\ \alpha_{m1}\gamma_1 + \ldots + \alpha_{mn}\gamma_n = 0 \end{cases}$. נכפול את כל השוויונות בסקלר λ ונקבל:

$\begin{cases} \alpha_{11} \cdot \lambda\gamma_1 + \ldots + \alpha_{1n} \cdot \lambda\gamma_n = 0 \\ \alpha_{21} \cdot \lambda\gamma_1 + \ldots + \alpha_{2n} \cdot \lambda\gamma_n = 0 \\ \vdots \\ \alpha_{m1} \cdot \lambda\gamma_1 + \ldots + \alpha_{mn} \cdot \lambda\gamma_n = 0 \end{cases}$. אולם פירושם של השיוויונות הללו הוא שה-n-יה

$\lambda c = (\lambda\gamma_1, \ldots, \lambda\gamma_n)$ פותרת את המערכת.

ב. יהיו $c = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n), d = (\delta_1, \ldots, \delta_n)$ שני פתרונות של המערכת הנתונה ולכן

מתקיימים השוויונות: $\begin{cases} \alpha_{11}\gamma_1 + \ldots + \alpha_{1n}\gamma_n = 0 \\ \alpha_{21}\gamma_1 + \ldots + \alpha_{2n}\gamma_n = 0 \\ \vdots \\ \alpha_{m1}\gamma_1 + \ldots + \alpha_{mn}\gamma_n = 0 \end{cases}$, $\begin{cases} \alpha_{11}\delta_1 + \ldots + \alpha_{1n}\delta_n = 0 \\ \alpha_{21}\delta_1 + \ldots + \alpha_{2n}\delta_n = 0 \\ \vdots \\ \alpha_{m1}\delta_1 + \ldots + \alpha_{mn}\delta_n = 0 \end{cases}$. נחבר את

שתי המערכות ונקבל: $\begin{cases} \alpha_{11}(\delta_1 + \gamma_1) + \ldots + \alpha_{1n}(\delta_n + \gamma_n) = 0 \\ \alpha_{21}(\delta_1 + \gamma_1) + \ldots + \alpha_{2n}(\delta_n + \gamma_n) = 0 \\ \vdots \\ \alpha_{m1}(\delta_1 + \gamma_1) + \ldots + \alpha_{mn}(\delta_n + \gamma_n) = 0 \end{cases}$.

כלומר, ה-n-יה $c + d = (\gamma_1 + \delta_1, \ldots, \gamma_n + \delta_n)$ פותרת את המערכת.

ג. אם c,d הם פתרונות של המערכת אזי $\lambda_1 c,\lambda_2 d$ הם גם פתרונות על פי א'. אבל אז, על פי ב', גם $\lambda_1 c+\lambda_2 d$ הוא פתרון של המערכת.

ד. התכונות הללו הן נחלתן של המערכות ההומוגניות. על מנת להראות שאינן מתקיימות במערכות לא הומוגניות, מספיק להביא דוגמא נגדית:

$\left(1,4\right),(2,3)$ שניהם פתרונות של $x+y=5$ אבל $\left(1,4\right)+(2,3)=(3,7)$ אינו פתרון של המשוואה כי $3+7=10\neq 5$.

$\left(1,4\right)$ פתרון של $x+y=5$ כאמור אבל $2\cdot\left(1,4\right)=(2,8)$ אינו פתרון של משואה זו.