תכנות דינאמי - bottom-up
אלגוריתם חמדני - top-down

בעיית הActivity Selection

יש n פעילויות $\{a_i\}_{i=1}^n$. לכל פעילות יש זמן התחלה S_i וזמן סיום f_i, ומתקיים $S_i < f_i$.
כל פעילות מתבצעת בטווח הזמנים $[s_i, f_i)$. שתי פעילויות לא חופפות אם $[s_i, f_i) \cap [s_j, f_j) = \emptyset$.

המטרה: למצוא קבוצה $S \subseteq \{a_i\}_{i=1}^n$ כך שאין זוג פעילויות חופפות, וS בעלת גודל מקסימלי.

אלגוריתם חמדני

הבחירה החמדנית: בכל שלב נבחר את הפעילות שמסתיימת הכי מוקדם ולא חופפת עם הפעילויות האחרות שבחרנו.

נגדיר $S \subseteq collide\,(a_i)$ - קבוצת הפעיליות בS שחופפות עם הפעילות a_i

RecursiveAS$(S=\{s_i,f_i\})$
```
if S=∅:
    return ∅
else
    a_i ←the activity with the earliest finish time
    return {a_i} ∪RecursiveAS(S \ Collide(a_i))
```

הוכחה

להוכחת אלגוריתם חמדני צריך להוכיח אך שני הדברים הבאים:

1. נכונות הבחירה החמדנית greedy choice property.
2. תת-מבנה אופטימלי optimal substructure.
   זה אומר שבהנתן שפתרון אופטימלי, אז אם נוריד את אחת מהבחירות מהבעיה, תת הפתרון שיתקבל מזה יהיה אופטימלי.

1. נכונות הבחירה החמדנית

יש פתרון שהאלג' שלנו בחר. נניח שמיינו את הפעילויות לפי סדר הסיום. אז בחירה החמדנית שלנו היא a_1

יהי פתרון פיזיבילי אופטימלי M'.

אם $a_1 \in M'$ ⇐סיימנו.

אם $a_1 \notin M'$ ⇐אז נסתכל על הפעילות סמסתיימת ראשונה שנמצאת בM'. נבמן אותו בa_k, $f_1 \leq f_k$.

נסתכל על הפתרון $M = (M' - \{a_k\}) \cup \{a_1\}$. צריך להוכיח שהפתרון M פיזיבילי לבעיה.

הפעילויות ב$M'-\{a_k\}$ אינן חופפות כי זה תת פתרון של M' שהוא פיזיבילי. בנוסף, a_1 לא חופפת עם אף פעילות מ$M'-\{a_k\}$ כי $f_1 \leq f_k$ וa_k היא הפעילות הראשונה בM'.

צריך להוכיח שM אופטימלי: $|M'| = |M'|-1+1 = |M|$. בגלל שהגדלים זהים M אופטימלי.

2. תת מבנה אופטימלי

תת פתרון של הפתרון האופטימלי, הוא פתרון אופטימלי לתת הבעיה המתאימה.

נוכיח שאם M הוא פתרון פיזיבילי אופטימלי לבעיה, אז לכל $a_i \in M$ מתקיים שתת הפתרון $M=\{a_i\}$ הוא פתרון אופטימלי לבעיה $S/collide\left(a_i\right)$.

צריך להראות ש$M-\{a_i\}$ הוא פתרון חוקי - ברור.

צריך להראות ש$M-\{a_i\}$ הוא פתרון אופטימלי. נניח בשלילה שקיים פתרון $\hat{M}$ יותר טוב וחוקי לבעיה $S/collide\left(a_i\right)$ ומתקיים $\left|\hat{M}\right| > |M-\{a_i\}|$. נסתכל על $M' = \hat{M}\cup\{a_i\}$. M' הוא פתרון חוקי כי אף פעילות ב$\hat{M}$ לא חופפת עם a_i.

$$|M'| = \left|\hat{M}\cup\{a_i\}\right| = \left|\hat{M}\right| + 1 > |M-\{a_i\}| + 1 = |M|-1+1 = |M|$$

$\Leftarrow$סתירה לאופטימליות של M.

הוכחה באינדוקציה על מס' הפעילויות בבעיה k

$k=1$ יש פעילות אחת. בוחרים אותה והפתרון חוקי ואופטימלי.

נניח שהפתרון שלנו אופטימלי לכל הבעיות עם פחות מk פעילויות. תהי בעיה עם k פעילויות. נסתכל על פתרון חוקי M שהאלגוריתם שלנו בחר. צריך להוכיח שהפתרון הזה אופטימלי.

יודעים מתכונת הבחירה החמדנית שקיים פתרון אופטימלי M^* שמכיל את הבחירה הראשונה(נסמן a) שהאלג' שלנו ביצע. נסתכל על תת פתרון של הפתרון האופטימלי M^* עבור תת הבעיה $S-\{a\}$: $M^*/collide\left\{a\right\}$. מתכונת תת המבנה האופטימלי יודעים ש$M^*/collide\left(a\right)$ הוא פתרון אופטימלי. נסמן את הפתרון של האלג' שלנו למס' הפעילויות שנותרו בX: $M = X\cup\{a\}$. מתקיים $|M^*|\,|collide\left\{a\right\}| = |X|$ כי $M^*/collide\left(a\right)$ הוא אופטימלי וX אופטימלי מהנחת האינדוקציה.

$$|M^*| = |M^*/collide\left(a\right)| + 1 = |X| + 1 = |M|$$

$\Leftarrow$ולכן M פתרון אופטימלי.

בעיית התרמיל בשברים

נתונים n איברים $\{a_i\}_{i=1}^{n}$ שלכל אחד רווח(תועלת) v_i, משקל w_i. נתון מס' B, וצריך למצוא $\sum c_i v_i$ מקסימליות כך ש$\sum w_i \leq B$

המטרה: לבחור ווקטור $(c_1,...c_n)$, $c_i\in[0,1]$ - c_iהאחוז שבחרנו מהאבקה.

נסמן $p_i = \dfrac{v_i}{w_i}$

האלגוריתם:

בהינתן שהאיברים ממויינים לפי p_i מהקטן לגדול

1. נאפס את $(c_1, ...c_n)$
2. $k \leftarrow 0$(כמה מילאנו עד עכשיו)
3. לכל i מ1 עד n בצע:
   - 3.1 אם $k + w_i \geq B$ אז $c_i = \dfrac{B-k}{w_i}$ ונסיים
   - 3.2 אחרת $c_i \leftarrow 1$ ו$k \leftarrow k + w_i$
4. נחזיר $(c_1, ...c_n)$

הוכחה

1) תכונת החירה הלוקלית(החמדנית)

קיים פתרון אופטימלי המכיל את הבחירה החמדנית.
נניח שבפתרון שלנו בחרנו את כל האבקה הראשונה. צריך להוכיח שקיים פתרון אופטימלי המכיל את כל האבקה הראשונה. נסתכל על פתרון M^*. אם M^* מכיל את כל האבקה הראשונה $\Leftarrow$ סיימנו.

- נניח שM^* לא מכיל את כל האבקה הראשונה. בפרט, הוא לא מכיל x משקל מהאבקה הזו.
  נבנה פתרון חדש: נבחר אבקות במשקל x, נוריד אותן מM^* ונוסיף את האבקה הראשונה.
  - הפתרון החדש הוא פיזיבילי: לא עלינו על המשקל B כי רק החלפנו אבקות באותו משקל. לא לקחנו מהאבקה הראשונה יותר ממה שיש(יותר מw) כי ידוע שמשקל x ממנה לא מופיע בM^*, והוספנו את הx הזה.
  - הוכחת אופטימליות: מכיוון שלאבקה הראשונה p מקסימלי, אז הרווחה עבורה במשקל x הוא לפחות כמו הרווח שהוצאנו במשקל x $\Leftarrow$ קיבלנו פתרון אופטימלי שמכיל את כל האבקה הראשונה.

באופן דומה אם בבחירה החמדנית לא לוקחים את כל האבקה הראשונה.

2) תת מבנה אופטימלי

נסמן את הפת רון של האלג' שלנו ב$M = (c_1, c_2, ...c_n)$. נניח שהאלג' לקח משקל $c_i w_i$ מהאבקה i. נראה שהפתרון $M' = (c_1, ...c_{i-1}, c_{i+1}, ...c_n)$ הוא אופטימלי לבעיה עם $n-1$ אבקות, שהקיבלות היא $B - c_i w_i$.

- M' פיזיבילי: נניח בשלילה שM' הוא לא פתרון אופטימלי. קיים פתרון $M^* = \left(c_1^*, ...c_{i-1}^*, c_{i+1}^*, ...c_n^*\right)$ פיזיבילי כך שהרווח מM^* גדול מהרווח מM'.

$$profit\left(M^*\right) = \sum_{j \neq i} c_j^* v_j > \sum_{j \neq i} c_j v_j = profit\left(M'\right)$$

- אופטימליות: M^* פיזיבילי ולכן המשקל שלו קטן מ$B-c_iw_i$. נסתכל על הפתרון לבעיה המקורית $\hat{M}=\left(c_1^*,...c_{i-1}^*,c_i,c_{i+1}^*,...c_n\right)$. $\hat{M}$ פיזיבילי.

$$profit\left(\hat{M}\right)=\sum_{j\neq i}c_j^*v_j+c_iv_i>\sum_{j\neq i}c_jv_j+c_iv_i=\sum_i c_iv_i=profit\left(M\right)$$

$\Leftarrow$בסתירה לאופטימליות של M