מפעם שעברה

משפט

אם $y_1, y_2, ...y_n$ פתרונות של מד"ר לינארי הומוגני בצורה נורמלית, ואפילו בנקודה אחת $w = 0$, אז הם ת"ל.

משפט אבל

אם $y_1, y_2, ...y_n$ פתרונות של מד"ר לינארי הומוגני אזי $a_n(x) \neq 0, w(x) = w(x_0)\, e^{-\int_{x_0}^{x} \frac{a_{n-1}(t)}{a_n(t)} dt}$
אם המד"ר בצורה נורמלית: $a_n(x) = 1, w(x) = w(x_0)\, e^{-\int_{x_0}^{x} a_{n-1}(t) dt}$.

וריאציית מקדמים

אם יודעים לפתור משוואה דיפרנציאלית לינארית הומוגנית, ניתן לפתור את המשוואה האי הומוגנית.

$$a_n(x) \neq 0, a_n(x)\, y^{(n)} + ... + a_1(x)\, y' + a_0(x)\, y = b(x) \quad (\Delta)$$

משפט

אם $y_1, y_2, ...y_n$ הם n פתרונות בת"ל של המש. ההומוגנית, ניתן לכתוב את הפתרון של האי הומוגנית בצורה

$$y = c_1(x)\, y_1(x) + c_2(x)\, y_2(x) + ... + c_n(x)\, y_n(x) \quad (*)$$

כאשר $c_1, c_2, ...c_n$ פותרים את המערכת

$$\begin{cases} c_1' y_1 + c_2' y_2 + ... + c_n' y_n = 0 \\ c_1' y_1' + c_2' y_2' + ... + c_n' y_n' = 0 \\ \vdots \\ c_1' y_1^{(n-1)} + c_2' y_2^{(n-1)} + ... + c_n' y_n^{(n-1)} = \dfrac{b}{a_n} \end{cases}$$

(מוצאים $c_1', c_2', ...c_n'$ מתוך משוואות אלה, מבצעים אינטגרלים למצוא $c_1, c_2, ...c_n$ עד כדי קבועים, וזה נותן פתרון כללי של האי-הומוגני - הקבועים. החופשיים נותנים חופשיות להוסיף פתרון של ההומוגני לפתרון של האי הומוגני).

הוכחה

בודקים שהפתרון המוצע$(*)$ מקיים את המשוואה(Δ)

$$y' = (c_1' y_1 + c_1 y_1') + (c_2' y_2 + c_2 y_2') + ... + (c_n' y_n + c_n y_n')$$

$$= c_1 y_1' + c_2 y_2' + ... + c_n y_n'$$

$$y'' = (c_1' y_1' + c_1 y_1'') + (c_2' y_2' + c_2 y_2'') + ... + (c_n' y_n' + c_n y_n'')$$

$$= c_1 y_1'' + c_2 y_2'' + ... + c_n y_n''$$

$$\vdots$$

$$y^{(n-1)} = c_1 y_1^{(n-1)} + c_2 y_2^{(n-1)} + ... + c_n y_n^{(n-1)}$$

$$y^{(n)} = c_1 y_1^{(n)} + c_2 y_2^{(n)} + ... + c_n y_n^{(n)} + \frac{b}{a_n}$$

נרצה לקחת את הפתרון ולהציב במשוואה. נצרף את הכל יחד:

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + ... + a_1 y' + a_0 y$$

$$= a_n \left[c_1 y_1^{(n)} + c_2 y_2^{(n)} + ... + c_n y_n^{(n)} + b \right]$$

$$+ a_{n-1} \left[c_1 y_1^{(n-1)} + c_2 y_2^{(n-1)} + ... + c_n y_n^{(n-1)} \right]$$

$$+ \vdots$$

$$+ a_1 \left[c_1 y_1' + c_2 y_2' + ... + c_n y_n' \right]$$

$$+ a_0 \left[c_1 y_1 + c_2 y_2 + ... + c_n y_n \right]$$

$$= a_n \frac{b}{a_n} = b$$

מילון

פונקציה מעתיקה קבוצה A לקבוצה B. אם A ו/או B הם קבוצות של פונקציות בקלות מסתבכים. לכן קוראים לפונקציה מקבוצה של פונקציות לקבוצה של פונקציות אופרטור(operator). דוגמה: $\frac{d}{dx}$ הוא אופרטור $f(x) \mapsto f'(x)$

קוראים לפונקציה מקבוצה של פונקציות לקבוצה של מספרים פונקציונל(functional).
דוגמה: אינטגרל מאפס לאחד: $f(x) \mapsto \int_0^1 f(x)\,dx$

הגדרה - אופרטור דיפרנציאלי לינארי

$a_0(x), a_1(1), ...a_n(x)$ פונקציות רציפות. האופרטור L המעתיק $y(x) \to a_n(x) y^{(n)} + a_{n-1}(x) y^{n-1}(x) + ... + a_1(x) y' + a_0(x) y$ נקרא אופרטור דיפרנציאלי לינארי מסדר n.

L מעתיק פונקציות עם n נגזרות רציפות(על קטע $I \subseteq \mathbb{R}$) לפונקציות רציפות(בקטע $I \subseteq \mathbb{R}$).

למה L נקראת לינארית?

ניתן להראות שלכל שני קבועים α_1, α_2 ולכן שתי פונקציות

$$L(\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x)) = \alpha_1 L(y_1(x)) + \alpha_2 L(y_2(x))$$

דוגמה

$$D = \frac{d}{dx}, D(y(x)) = y'(x)$$

$$L = D^2 + xD + 3$$

$$L(y(x)) = y'' + xy' + 3$$

מד"ר לינארי ניתן לכתוב בצורה $(*)$ $Ly = b(x)$:

$$L = a_n(x) D^n + a_{n-1}(x) D^{n-1} + ... + a_1(x) D + a_0(x)$$

האם ניתן להגדיר הופכי לL? כלומר האם קיים פונקציה יחידה $y(x)$ הפותרת את $(*)$, אז נכתוב $y = Mb$?

<u>לא</u>! יש הרבה פתרונות למד"ר

אבל אם נקבע פתרון יחיד ע"י(לדוגמה) תנאי התחלה: $y(x_0), '(x_0), ...y^{(n-1)}(x_0)$ אז אולי אפשר.

דוגמה

$$L = D, y' = b$$

נתון $y(x_0) = y_0$. נעשה אינטגרל לשני הצדדים:

$$y(x) - y(x_0) = \int_{x_0}^{x} b(t)\, dt$$

ניקח $y(x_0)=0$: $\boxed{y(x)=\int_{x_0}^{x} b(t)\,dt}$.

$$Dy=b\rightarrow y=Mb$$

דוגמה

$$y''+a_1(x)\,y'+a_0(x)\,y=b(x)$$

$$y(x_0)=y'(x_0)=0$$

$$Ly=b\rightarrow y=Mb$$

$L=D^2+a_1(x)\,D+a_0(x)$. מה זה M?
נקרא לפתרונות של ההומוגני y_1,y_2(בת"ל). פתרון האי הומוגני הוא

$$y=c_1(x)\,y_1(x)+c_2(x)\,y_2(x)$$

כאשר

$$\begin{cases} c_1'y_1+c_2'y_2=0 \\ c_1'y_1'+c_2'y_2'=b \end{cases}$$

ממש. 1: $c_2'=\dfrac{-c_1'y_1}{y_2}$. ממש. 2: $c_1'y_1'+\left(\dfrac{-c_1'y_1}{y_2}\right)y_2'=b$

$$c_1'\left(y_1'y_2-y_1y_2'\right)=by_2$$

$$c_1'=\frac{-by_2}{W},c_2'=\frac{by_1}{W}$$

אנו רוצים שזה יתאפס בx_0, לכן נעשה את כל האינטגרלים מx_0:

$$\begin{cases} c_1(x)=K_1+\int_{x_0}^{x}\dfrac{-b(t)\,y_2(t)}{W(t)}dt \\ c_2(x)=K_2+\int_{x_0}^{x}\dfrac{b(t)\,y_1(t)}{W(t)}dt \end{cases}$$

ויש למצוא K_1,K_2 קבועים כך ש$y(x_0)=y'(x_0)=0$.
היות ו$c_1'y_1+c_2'y_2=0$:

$$y(0)=c_1(x)\,y_1(x)+c_2(x)\,y_2(x)$$

$$y'(x) = c_1(x)\, y_1'(x) + c_2(x) + y_2'(x)$$

מקבלים $y(x_0) = y'(x_0) = 0$ אמ"ם $c_1(x_0) = c_2(x_0) = 0$ ולכן $K_1 = K_2 = 0$, וסוף סוף

$$y(x) = y_1(x) \int_{x_0}^{x} \frac{-b(t)\, y_2(t)}{W(t)} dt + y_2(x) \int_{x_0}^{x} \frac{b(t)\, y_1(t)}{W(t)} dt$$

$$= \int_{x_0}^{x} \frac{y_1(t)\, y_2(x) - y_1(x)\, y_2(t)}{W(t)\,(= y_1 y_2' - y_2 y_1')} b(t)\, dt$$

האופרטור ההופכי M מוגדר ע"י

$$Mb = \int_{x_0}^{x} G(x,t)\, b(t)\, dt$$

זהו אופרטור לינארי.

$$G(x,y) = \frac{y_1(t)\, y_2(x) - y_1(x)\, y_2(y)}{y_1(t)\, y_2'(t) - y_2(t)\, y_1'(t)}$$

(y_1, y_2 פותרים את ההומוגני $y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$)

הפונקציה הזו(G) נקראת פונקציית גרין(Green's function) לבעייה של ערכים התחלתיים

דוגמה

$$y'' + y = b(x)$$

$$y(0) = y'(0) = 0$$

פתרונות של ההומוג: $\begin{cases} y_1(x) = \cos x \\ y_2(x) = \sin x \end{cases}$

$$G(x,t) = \frac{\cos t \sin x - \sin t \cos x}{\cos t \cos t - \sin t\,(-\sin t)} = \sin(x-t)$$

$$y(x) = \int_0^x \sin(x-t)\, b(t)\, dt$$

איך גוזרים דבר כזה ביחס לx? יש לנו שתי "תרומות" של x - בתוך האינטגרל ובתור גבול עליון של האינטגל.

הכלל הוא

$$\frac{d}{dx}\left[\int_0^x f(x,t)\, dt\right] = f(x,x) + \int_0^x \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\, dt$$

פה:

$$y' = \int_0^x \cos(x-t)\, b(t)\, dt$$

$$y'' = b(x) + \underbrace{\int_0^x -\sin(x-t)\, b(t)\, dt}_{-y}$$

רואים ש $\begin{array}{c} y'' + y = b \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{array}$

לפעמים רוצים לפתור את המשוואה $y'' + a_1(x)\, y' + a_0(x)\, y = b(x)$ עם <u>תנאי שפה</u> $y(x_0) = y(x_1) = 0$

אין לבעיה זאת קיום ויחידות: לא בהכרח קיים פתרון, יש לפעמים יותר מפתרון אחד וכו'.

ראינו שאם y_1, y_2 פותרים את ההומוג אזי $y = c_1(x)\, y_1(x) + c_2(x)\, y_2(x)$ כאשר

$$\begin{cases} c_1' = \frac{-by_2}{W} \\ c_2' = \frac{by_1}{W} \end{cases}$$

ניקח $y_1(x)$ להיות פתרון של ההומוג עם $y_1(x_0) = 0$, $y_2(x)$ להיות הפתרון של ההומוג עם $y_2(x_1) = 0$ (לא הבכרח ניתן לעשות את זה).

ניקח $c_2 = \int_{x_0}^x \frac{b(t)\, y_1(t)}{W(t)} dt$ (כי אנחנו רוצים $c_2(x_0) = 0$). $c_1 = \int_{x_1}^x \frac{-b(t)\, y_2(t)}{W(t)} dt$ (ואז $c_1(x_1) = 0$).

מצאנו ש $y(x) = y_1(x) \int_x^{x_1} \frac{y_2(t)\, b(t)}{W(t)} dt + y_2(x) \int_{x_0}^x \frac{y_1(t)\, b(t)}{W(t)} dt$. נרצה לחבר את האינטגרלים, אבל הם לא על אותו תחום.

נשתמש בפונקציה $H(s) = \begin{cases} 1 & s \geq 0 \\ 0 & s < 0 \end{cases}$ Heaviside function, ואז נציב:

$$\int_{x_0}^x \frac{y_1(t)\, b(t)}{W(t)} dt = \int_{x_0}^{x_1} \frac{y_1 b(t)}{W(t)} H(x-t)\, dt$$

$$\int_x^{x_1} \frac{y_2(t)\, b(t)}{W(t)} dt = \int_{x_0}^{x_1} \frac{y_2(t)\, b(t)}{W(t)} H(t-x)\, dt$$

ונקבל סה"כ

$$y(x) = \int_{x_0}^{x_1} K(x,t)\, b(t)\, dt$$

כאשר

$$K(x,t) = \frac{y_1(t)\, y_2(x)\, H(x-t) + y_1(x)\, y_2(t)\, H(t-x)}{W(t)}$$

היא פונקציית גרין לבעיית שפה.

שימו לב!! $\boxed{\begin{array}{l} y_1(x_0)=0 \\ y_2(x_1)=0 \end{array}}$

דוגמה

$$y''+y=b(x)$$
$$y(0)=y(1)=0$$

במקום $\begin{array}{l} y_1=\cos x \\ y_2=\sin x \end{array}$ (שלא מתאפסים בקצוות) נבחר צירופים ליניארים שלהם:

$$y_1=\sin x$$
$$y_2=\sin x-\tan 1\cos x$$

$y(0)=y(\pi)=0$, $\begin{array}{l} y_1=\sin x \\ y_2=\alpha\cos x+\beta\sin x \end{array} \Leftarrow \underset{(y_2(\pi)=0)}{\alpha=0} \Leftarrow y_2=\beta\sin x$ - זה לא עובד, כי התנאים לא מתאימים.

מד"ר ליניאריות עם מקדמים קבועים

$$a_ny^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+...+a_1y'+a_0y=b(x)$$

$a_n,...a_0$ - כולם קבועים, לא פונקציות של x. b לא בהכרח קבוע.

$b=0$ - הומוגני. $b\neq 0$ - לא הומוגני.

בצורה אופרטורית: $Ly=b(x)$, $L=a_nD^n+a_{n-1}D^{n-1}+...+a_1D+a_0$ אופרטור דיפרנציאלי ליניארי עם מקדמים קבועים.

משפט

אופרטורים דיפרנציאלים ליניארים עם מקדמים קבועים מתחלפים.

כלומר אם L_1,L_2 אדלמ"קים, $L_1L_2=L_2=L_1$

הוכחה

מספיק להוכיח במקרה $\begin{array}{l} L_1=\alpha D^n \\ L_2=\beta D^m \end{array}$ (α,β קבועים)

$$L_1L_2y=\alpha D^n\left(\beta y^{(m)}\right)=\alpha\beta y^{(m+n)}$$

$$L_2L_1y=\beta D^m\left(\alpha y^{(n)}\right)=\alpha\beta y^{(m+n)}$$

המקרה הכללי נובע ע"י ליניאריות■

הערה

אם α או β תלויים בx, L_1L_2 לא בהכרח שווה לL_2L_1!!

למה 1

נניח ש$L = L_1L_2...L_d$ ($L_1, ...L_d$ אדלמ"קים). אזי אם $L_iy = 0$ גם $L_iy = 0$ (לi כלשהו) גם $Ly = 0$.

הוכחה

ע"י חילופיות:

$$Ly = L_1L_2...L_dy = L_1L_2...L_{i-1}L_{i+1}...L_dL_iy = 0$$

■