תרגיל

יהי V ממ"פ ממימד *n* ויהיו $v_1,...,v_n \in V$ כלשהם.

נגדיר מטריצה $A=\langle a_{ij}\rangle$ כאשר $a_{ij}=\langle v_i,v_j\rangle$, כלומר

$$A=\begin{pmatrix} \langle v_1,v_1\rangle & \langle v_1,v_2\rangle & \cdots & \langle v_1,v_n\rangle \\ \langle v_2,v_1\rangle & \langle v_2,v_2\rangle & \dots & \langle v_2,v_n\rangle \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \langle v_n,v_1\rangle & \dots & \cdots & \langle v_n,v_n\rangle \end{pmatrix}$$

הוכח: $v_1,...,v_n$ ת"ל $\Leftarrow |A|=0$.

הוכחה

נניח בה"כ ש $v_n=\sum_{i=1}^{n-1}\alpha_i v_i$. אז מכיוון שהמ"פ לינארית באיבר הראשון, לכל $1\le j\le n$:

$$\langle v_n,v_j\rangle=\left\langle \sum_{i=1}^{n-1}\alpha_i v_i,v_j\right\rangle=\sum_{i=1}^{n-1}\alpha_i\langle v_i,v_j\rangle$$

נציב זאת בשורה האחרונה של המטריצה A ונקבל

$$A=\begin{pmatrix} \langle v_1,v_1\rangle & \langle v_1,v_2\rangle & \cdots & \langle v_1,v_n\rangle \\ \langle v_2,v_1\rangle & \langle v_2,v_2\rangle & \dots & \langle v_2,v_n\rangle \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^{n-1}\alpha_i\langle v_i,v_1\rangle & \dots & \cdots & \sum_{i=1}^{n-1}\alpha_i\langle v_i,v_n\rangle \end{pmatrix}$$

נשאר לשים לב שהשורה האחרונה היא צירוף לינארי של שאר השורות: $R_n=\alpha_1R_1+\alpha_2R_2+...+\alpha_{n-1}R_{n-1}$.

לכן דטרמיננטת המטריצה מתאפסת.