שיטות נומריות

תרגול

נושא: יום שלישי השבוע ב' במכלול התשע"ד

קירובים:

הגדרת הבעיה: נתונה סדרה של נק' $(x_0,y_0),(x_1,y_1),\dots,(x_n,y_n)$ ונרצה למצוא פולינום ממעלה נמוכה כך ש- $P(x_i)\approx y_i$, כלומר נרצה להביא למינימום את הנורמה: $\sqrt{\sum_{i=0}^{n}(P(x_i)-y_i)^2} = \|P(x)-y\|$.

ניתן להגדיר את הבעיה באופן הבא: $S=\sum_{i=0}^{n}(P(x_i)-y_i)^2$

למשל, עבור פולינום לינארי:

$$p=ax+b \qquad S=\sum_{i=0}^{n}(ax_i+b-y_i)^2$$

גוזרים את S לפי a $\rightarrow \frac{\partial S}{\partial a}=2\sum_{i=0}^{n}x_i(ax_i+b-y_i)=0$

גוזרים את S לפי b $\rightarrow \frac{\partial S}{\partial b}=2\sum_{i=0}^{n}(ax_i+b-y_i)=0$

$$a\sum_{i=0}^{n}x_i^2+b\sum_{i=0}^{n}x_i=\sum_{i=0}^{n}x_iy_i$$

$$a\sum_{i=0}^{n}x_i+b\sum_{i=0}^{n}1=\sum_{i=0}^{n}y_i$$

$$\begin{pmatrix}\sum x_i^2 & \sum x_i\\ \sum x_i & \sum 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sum x_iy_i\\ \sum y_i\end{pmatrix}$$

נפתור את המערכת ונמצא את a,b המתאימים.

תרגיל: מצאו ישר שמהווה הקירוב הטוב ביותר (מבחינת ריבועים פחותים) לנתונים:

x	0.3	0.4	0.6	0.8
y	1	0.9	1.2	1.5

פתרון: כדי למצוא את הישר $p(x)=ax+b$ נפתור את המערכת הבאה:

$AX=b \quad / A^{-1}$ משמאל

$$\begin{pmatrix}1.25 & 2.1\\ 2.1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2.58\\ 4.8\end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1.12\\ 0.56\end{pmatrix} \qquad y=1.12x+0.56$$

$$\boxed{A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} \qquad A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix}d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}}$$

עבור פולינום ממעלה גבוהה יותר נניח שנרצה למצוא קירוב לאוסף נק' $(x_0,y_0),(x_1,y_1),\dots,(x_n,y_n)$

קירוב לפולינום ממעלה 2:

$$p(x)=ax^2+bx+c$$

$$S=\sum(ax_i^2+bx_i+c-y_i)^2$$

כדי להביא את S למינימום נגזור לפי כל אחד מהמשתנים:

$$\frac{\partial S}{\partial a}=2\sum x_i^2(ax_i^2+bx_i+c-y_i)=0 \qquad \frac{\partial S}{\partial c}=2\sum 1(ax_i^2+bx_i+c-y_i)=0$$

$$\frac{\partial S}{\partial b}=2\sum x_i(ax_i^2+bx_i+c-y_i)=0$$

$$\begin{pmatrix}\sum x_i^4 & \sum x_i^3 & \sum x_i^2\\ \sum x_i^3 & \sum x_i^2 & \sum x_i\\ \sum x_i^2 & \sum x_i & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sum x_i^2y_i\\ \sum x_iy_i\\ \sum y_i\end{pmatrix}$$

רגרסיה לינארית:

תרגיל:

לפנינו טבלה של תצפיות:

X	2.2	2.5	3.5	4	5	7	10	13
y	15	10	4	4.5	3	3	2.5	2.5

ידוע שהפונק' מתנהגת כמו $f(x)=\frac{1}{\delta_1(x)+\delta_0}$ מצאו את הפונק' בעזרת רגרסיה לינארית.

פתרון:

$$\frac{1}{f(x)} = \delta_1(x)+\delta_0 \approx \frac{1}{y}$$

נבנה פונק' S: $S=\sum(\delta_1 x_i+\delta_0-\frac{1}{y_i})$ ונרצה להביא אותה למינימום:

$$\frac{\partial S}{\partial \delta_1}=\frac{\partial S}{\partial \delta_0}=0$$

$$\begin{pmatrix} \sum x_i^2 & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \sum \frac{x_i}{y_i} \\ \sum \frac{1}{y_i} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 382.34 & 47.2 \\ 47.2 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 15.36 \\ 2.11 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \delta_0 = 0.0963 \\ \delta_1 = 0.0283 \end{matrix} \Rightarrow f(x)=\frac{1}{0.0283x+0.0963}$$

תרגיל:

דרוש למצוא a,b כך ש- $y_i \approx a\cdot e^{bx_i}$ עבור הנתונים הבאים:

X	0	0.5	1	1.5	2
y	1.1	1.4	1.3	2.3	3

א. מצאו a,b בעזרת ע"י רגרסיה לינארית

ב. האם a,b שמצאתם צריכים להיות שהייתם מוצאים אם הייתם דורשים $S=\sum(y_i-ae^{bx_i})^2$ יהי מינימלי. הוכח ש- S מינימלי אמ"מ:

$$a\sum x_i e^{2bx_i} = \sum x_i y_i e^{bx_i}$$
$$a\sum e^{2bx_i} = \sum y_i e^{bx_i}$$

פתרון:

א.

$$y_i \approx ae^{bx_i} \xRightarrow{/\ln()} \ln(y_i) \approx \ln(ae^{bx_i}) = \ln a + b\cdot x_i$$

כ"ל שנרצה לפתור את המערכת הבאה:

$$\begin{pmatrix} \sum x_i^2 & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b \\ \ln a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \sum x_i \ln y_i \\ \sum \ln y_i \end{pmatrix}$$

והפתרון: $a=1.1$ $\quad b=0.5$ $\quad f(x)=1.1\cdot e^{\frac{x}{2}}$

ב. לפי רגרסיה לינארית $S=\sum(y_i-ae^{bx_i})^2$ ונרצה להביא את הפונק' S למינימום:

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 2\sum e^{bx_i}(y_i-ae^{bx_i})=0 \qquad \frac{\partial S}{\partial b} = \cancel{2}\sum e^{bx_i}\cdot x_i\cdot(y_i-ae^{bx_i})=0$$

$$\sum y_i e^{bx_i} = a\sum e^{2bx_i}$$
$$\sum x_i y_i e^{bx_i} = a\sum x_i e^{2bx_i}$$

פתרון נומרי   ג

תרגיל ב'

<u>בס"ד</u> יום שלישי הרצאה ג באלול התשנ"ד

<u>שיפור פולינומים אורתוגונליים:</u>

יהי φ_i סדרת פולינום מדרגה i. P_i יקראו פולינומים אורתוגונליים אם:

$$\sum_{k=0}^{n} \varphi_i(x_k)\,\varphi_j(x_k)=0 \qquad \forall\, i\neq j$$

במקרה זה נשתמש בפולינומים אורתוגונליים, ובכך נמצא את הקירוב הפולינומי הבא:

$$P(x)=\sum_{i=0}^{m} a_i\,\varphi_i(x) \qquad a_i=\frac{\sum_{i=0}^{n} y_i\,\varphi_j(x_i)}{\sum_{i=0}^{n}(\varphi_j(x_i))^2}$$

פולינומים אורתוגונליים:

<u>דוגמא:</u>

מצאו פולינום ממעלה 2 שהוא [illegible] של פ.א. הקירוב דרך הנק' הבאות:

x	1	2	3	4	5	6	7	8
y	1.2	2.1	-3.4	2.5	4.6	3.4	4.2	2.6

<u>פתרון:</u>

$$\varphi_0=1 \qquad \varphi_1=x+a \qquad \varphi_2=x^2+bx+c$$

$$\sum \varphi_0\cdot\varphi_1=0 \Rightarrow \sum_{i=0}^{n} x_i+a=0$$

$$36+8a=0 \Rightarrow a=-4.5$$

$$\sum \varphi_0\cdot\varphi_2=0 \Rightarrow \sum x^2+bx+c=0$$

$$\sum \varphi_1\cdot\varphi_2=0 \Rightarrow \sum (x+a)(x^2+bx+c)=0$$

$$\Rightarrow b=-9,\ c=15$$

$$\varphi_0=1 \qquad \varphi_1=x-4.5$$

$$\varphi_2=x^2-9x+15$$

$$P(x)=\sum a_i\varphi_i(x) \Leftarrow$$

$$a_0=\frac{\sum_{i=0}^{7} y_i}{\sum_{i=0}^{7} 1}=2.175$$

$$a_1=\frac{\sum y_i\cdot(x_i-4.5)}{\sum (x_i-4.5)^2}=0.502$$

$$a_2=\frac{\sum y_i\cdot\varphi_2}{\sum \varphi_2^2}=-0.019$$

$$P(x)=2.175\,(1)+0.502\,(x-4.5)-0.99\,(x^2-9x+15)$$

<u>פונק' רציפות:</u>

השאלה איפה נקרא פונק' רציפה. עבור: $P(x)=\sum_{j=0}^{n} a_j\,\varphi_j(x)$ כך ש- $\varphi_j(x)$

פונק' אורתוגונליות: $\langle\varphi_i(x),\varphi_j(x)\rangle=0$

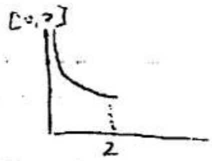
$$\int_b^a \varphi_j(x)\,\varphi_i(x)\,\omega(x)\,dx=0$$

$\omega(x)$ היא פונק' משקל הנותנת חשיבות לקטע מסוים. $\omega(x)=1$ - כל הנק' בקטע שוות.

$\omega(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ - משקל גבוה יותר לקצוות הקטע $(-1,1)$

$$a_j = \frac{\int_a^b \varphi_j(x) \cdot f(x)\, \omega(x)\, dx}{\int_a^b (\varphi_j(x))^2\, \omega(x)\, dx}$$

הערה



$$w(x) = \frac{1}{x}$$

דוג' לפולינומים אורתוגונליים מוכרים:

פולינום	אינטרבל	פונק' משקל	$\int_a^b (\varphi_j(x))^2 \omega(x)\, dx$	פולינומים ראשונים
לז'נדר	$[-1,1]$	1	$\frac{2}{2n+1}$	$P_0 = 1$ $P_1 = x$ $P_2 = \frac{3x^2-1}{2}$ $P_3 = \frac{5x^3-3x}{2}$
צ'בישב	$[-1,1]$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\begin{cases} \pi & n=0 \\ \frac{\pi}{2} & n>0 \end{cases}$	$T_0 = 1$ $T_1 = x$ $T_2 = 2x^2-1$ $T_3 = 4x^3-3x$

$$P_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1} \cdot x \cdot P_n(x) - \frac{n}{n+1} \cdot P_{n-1}(x)$$

$$T_{n+1}(x) = 2x T_n(x) - T_{n-1}(x)$$

ל קטע כללי. ניתן להעביר ל- $[-1,1]$ ע"י

$$x \in [a,b] \Rightarrow y = 2 \cdot \left(\frac{x-a}{b-a}\right) - 1$$

$y \in [-1,1]$

דוג' 3:

מצאו קירוב $p(x)$ פולינום מסדר 2 לפונק' $f(x) = 1-x^4$ בקטע $[-1,1]$ במובן ש- $p(x)$ א $f(x)$ עם פונק' משקל $\omega(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

פתרון: נשתמש בפולינומי צ'בישב.

$$p(x) = a_0 \cdot T_0(x) + a_1 T_1(x) + a_2 T_2(x)$$

$$a_i = \frac{\int_{-1}^{1} \frac{f(x) \cdot T_i(x)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx}{\int_{-1}^{1} \frac{T_i(x)^2}{\sqrt{1-x^2}}\, dx}$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{(1-x^4)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$$

$x = \sin t$

$dx = \cos t\, dt$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin^4 t}{\cos t} \cdot \cos t\, dt = \dots = \boxed{\frac{5}{8}}$$

בס"ד יום שלישי השבוע ז מעבדת התשע"ד   [illegible] נומרי

תרגיל ג

$$a_1 = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{(1-x^4)\cdot x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \ldots = 0$$

$$a_2 = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{f(x)\cdot T_2(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \ldots = -\frac{1}{2}$$

$$\Downarrow$$

$$P(x) = \frac{5}{8}T_0(x) + 0\cdot T_1(x) - \frac{1}{2}T_2(x) = \frac{5}{8} - \frac{1}{2}(2x^2-1) = -x^2 + \frac{9}{8}$$

תרגיל:

מצאו פולינום ממעלה 2 שמהווה קירוב הטוב ביותר במובן ריבועים מינימליים לפונק' $f(x)=\sqrt{2x+3}$

כך ש- $\int_0^2 (f(x)-P(x))\,dx$ מינימלי

פתרון:

$w(x)=1$ ולכן נשתמש בפולינומי לז'נדר $x\in[0,2]$ $t=x-1 \Rightarrow t\in[-1,1]$

$$g(t) = \sqrt{2(t+1)+3} = \sqrt{2t+5}$$

$$\int_{-1}^{1}(g(t)-p(t))^2\,dt$$

$$p(t) = a_0P_0(t) + a_1P_1(t) + a_2P_2(t)$$

$$a_0 = \frac{\int_{-1}^{1} g(t)P_0(t)\,dt}{\int_{-1}^{1}(P_0(t))^2\,dt} = \frac{1}{2}\cdot\int_{-1}^{1}\sqrt{2t+5}\,dt = \ldots = 2.2207$$

$$a_1 = \frac{3}{2}\int_{-1}^{1}\sqrt{2t+5}\cdot t\,dt = \ldots = 0.45$$

$$a_2 = 0.03139$$

$$\Downarrow$$

$$p(t) = 2.2207\cdot 1 + 0.45\cdot t + 0.03139\cdot\frac{3t^2-1}{2}$$

$$\Downarrow$$

$$p(x) = 2.2207 + 0.45(x-1) + 0.03139\cdot\frac{3(x-1)^2-1}{2}$$

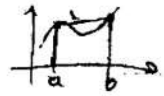
תרגול   בס"ד

אינטגרציה נומרית:

שיטת ניוטון קוטס:

נחלק את הקטע לכמה קטעים שווים, כאשר עבור כל קטע נעביר פולינום אינטרפולציה מדרגה p את האינטגרל עבור הפולינום נחשב בצורה אנליטית

שיטת הטרפז:



פולינום מדרגה 1. נעביר קו לינארי בין $f(a)$ ל- $f(b)$ ונחשב את האינטגרל:

$$I_T = \frac{h}{2}\left(f(a) + f(b)\right), \quad h = b-a$$

$$E_T = -\frac{h^3}{12} f''(\xi)$$

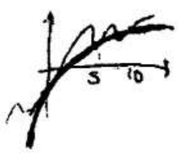
שיטת הטרפז המורכבת:

נסמן m - מס' הקטעים $h = \frac{b-a}{m}$

$$I_T^c = \frac{h}{2}\left(f(a) + 2\sum_{i=1}^{m-1} f(a+ih) + f(b)\right)$$

$$E_T^c = -\frac{(b-a)\cdot h^2}{12}\cdot f''(\xi) \qquad \xi \in [a,b]$$

שיטת סימפסון:



~~[illegible]~~

בונים פולק סביב 3 נק' ← פולינום מדרגה 2,

חישוב האינטגרל:

$$I_S = \frac{h}{3}\cdot\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right] \qquad h = \frac{b-a}{2}$$

$$E_S = \frac{-h^5}{90} f^{(4)}(\xi)$$

סימפסון המורכבת:

$$h = \frac{b-a}{2m}$$

$$I_S^c = \frac{h}{3}\left[f(a) + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + 2f_4 + \dots + 4f_{2m-1} + f_{2m}\right]$$

$$E_S^c = -\frac{(b-a)\cdot h^4}{180}\cdot f^{(4)}(\xi) \qquad \xi \in [a,b]$$

$$f_i = f(a + i\cdot h)$$

תרגיל:

חשבו את האינטגרל $\int_0^{\pi} \underbrace{e^x \cos x}_{f(x)}\, dx$ בשיטת הטרפז עבור $h=\pi$, $h = \frac{\pi}{2}$

פתרון:

$h=\pi$: קטע אחד

$$I_T = \frac{\pi}{2}\left[f(0) + f(\pi)\right] = -34.779$$

$h = \frac{\pi}{2}$:

$$I_2 = \frac{\pi}{4}\left(f(0) + 2f\left(\frac{\pi}{2}\right) + f(\pi)\right) = -17.389$$

תרגול:

חשב את האינטגרל $\int_0^1 \frac{x^2}{\sin x}\,dx$ בשיטת סימפסון עבור $\begin{cases} m=1 \\ m=2 \end{cases}$ מקטעים

פתרון:

$m=1 \Rightarrow h=\frac{1}{2}$

$I_s = \frac{\frac{1}{2}}{3}\left(f_{(0)} + 4f\left(\tfrac{1}{2}\right) + f_{(1)}\right) = 0.5457$

$m=2 \Rightarrow h=\frac{1}{4}$

$I_{s_2} = \frac{\frac{1}{4}}{3}\cdot\left(f_{(0)} + 4f\left(\tfrac{1}{4}\right) + 2f\left(\tfrac{1}{2}\right) + 4f\left(\tfrac{3}{4}\right) + f_{(1)}\right) = 0.545222$

תרגיל:

נתונה טבלת הנק' הבאה:

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1	1.25
$f(x)$	0.5	0.707	0.866	1	1.118

חשבו את $\int_{\frac{1}{4}}^{1\frac{1}{4}} f(x)\,dx$ עפ"י שיטת סימפסון עם $h=\frac{1}{4}$

$I_3 = \frac{1}{12}\left(f\left(\tfrac{1}{4}\right) + 4f\left(\tfrac{1}{2}\right) + 2f\left(\tfrac{3}{4}\right) + 4f(1) + f\left(1\tfrac{1}{4}\right)\right) = 0.848107$

שיטת גאוס: - לז'נדר:

עבור אינטגרל מהצורה $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$ נחשב באופן הבא: $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx \left(\sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i)\right) + E_n$

x_i - נק' הדיסקריטיזציה $\}$ נתונים בטבלה

w_i - משקלים

n - מס' הנק'

$$E_n = \frac{2^{2n+1}\cdot(n!)^4}{(2n+1)\,((2n)!)^3}\cdot f^{(2n)}(\xi) \qquad \xi \in [-1,1]$$

דוג':

חשבו את האינטגרל $\int_0^1 \sqrt{e^{(x^{1.5})}-1}\,dx$ בשיטת גאוס עם 3 נק':

פתרון:

$x\in[0,1] \qquad t=2x-1$

$t\in[-1,1] \qquad x=\frac{t+1}{2}$

$$\int_0^1 \sqrt{e^{(x^{1.5})}-1}\,dx = \int_{-1}^{1} \underbrace{\sqrt{e^{\left(\frac{t+1}{2}\right)^{1.5}}-1}\cdot\frac{1}{2}}_{f(t)}\,dt$$

נבחר נק' x_i שהן השורשים של הפולינום P_i,

$P_3 = \frac{5x^3-3x}{2} = 0$

$x=0 \qquad x=\pm\sqrt{\frac{3}{5}}$

$x_1 = -0.754 \qquad w_1 = 0.55$

$x_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad w_2 = 0.88$

$x_3 = 0.754 \qquad w_3 = 0.55$

בס"ד

ט

$I = w_1 \cdot f(x_1) + w_2 \cdot f(x_2) + w_3 f(x_3) = \dots = 0.66145$

שיטת גאוס – צ'בישב

עבור אינטגרל מהצורה: $\int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

$$\int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \approx \frac{\pi}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} f(x_i)$$

E_n – השגיאה

n – מס' הנק' , x_i – נק' הדגימה (צ'בישב) המחושבות ע"י:
$$x_i = \cos\left[\frac{(2i-1)\pi}{2n}\right]$$

$$E_n = \frac{\pi}{(2n)!\,2^{2n-1}} \cdot f^{(2n)}(\xi) \qquad \xi \in [-1,1]$$

תרגיל:

האם ניתן לחשב את האינטגרל: $\int_{0}^{2} \frac{(x^2-1)(1+2x)}{\sqrt{x(2-x)}}\,dx$ במדויק?

אם לא, הסבר מדוע. אם כן, מצאו את מס' הנק' n הדרושות וחשבו את האינטגרל.

$x \in [0,2] \qquad t \in [-1,1] \qquad \begin{matrix} t = x-1 \\ x = t+1 \end{matrix} \Rightarrow dx = dt$

$$\int_{-1}^{1} \frac{((t+1)^2-1)(1+2(t+1))}{\sqrt{(t+1)(2-t-1)}}\,dt = \int_{-1}^{1} \frac{(t^2+2t)(2t+3)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \int_{-1}^{1} \frac{2t^3+7t^2+6t}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$$

נסמן $f(t) = 2t^3+7t^2+6t$ ונשתמש בשיטת צ'בישב.

נדרוש $E_n = 0$ נרצה למצוא n כך ש- $f^{(2n)}(\xi) = 0$

f פולינום מדרגה 3 ולכן $p^{(4)} = 0$, $2n = 4 \Leftarrow n = 2$

$x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$x_2 = \frac{2}{\sqrt{2}}$

$I = \frac{\pi}{2} \cdot (f(x_1) + f(x_2)) = \frac{7\pi}{2}$