תרגיל 2

שאלה1: האם 4 הוא יוצר של $\mathbb{Z}_{12}$? האם 7 הוא יוצר? השתמשו בסדר של איבר.

שאלה 2: תהי G חבורה, $a \in G$. הוכיחו: $o(a) = o(a^{-1})$.

שאלה 3: תהי G חבורה סופית. $a, b \in G$ הוכיחו כי $o(ab) = o(ba)$.
(הדרכה: חשבו את $(ab)^{o(ba)}$ ואת $(ba)^{o(ab)}$).

שאלה 4: תהא G חבורה סופית. יהיו $a, b \in G$. הוכח/הפרך

(א) אם a, b מתחלפים אז $o(ab) = o(a) \cdot o(b)$

(ב) $\langle a \rangle = \langle a^3 \rangle$

(ג) אם $b = a^4$ אזי $\langle ab \rangle \subseteq \langle a \rangle$

(ד) $\langle a \rangle = \langle a^{-1} \rangle$

שאלה 5: הוכח/הפרך כי H היא ת"ח של G במקרים הבאים

(א) $H = \{a + ai \mid a \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{C} = G$

(ב) $H = m\mathbb{Z}_n = \{mz \mid z \in \mathbb{Z}_n\} \subseteq \mathbb{Z}_n = G$

(ג) $H = \{A \in \mathbb{F}^{n \times n} \mid |A| \neq 0\} \subseteq \mathbb{F}^{n \times n} = G$

(ד) תהא G חבורה ו $n \in \mathbb{N}$. $H = \{g^n | g \in G\}$

(ה) תהא G חבורה חילופית ו $n \in \mathbb{Z}$. $H = \{g^n | g \in G\}$

(ו) $H = \{x^2 | x \in \mathbb{Z}_4\} \subseteq \mathbb{Z}_4$

(ז) $H = \{x^3 | x \in \mathbb{Z}_5\} \subseteq \mathbb{Z}_5$

(ח) $H = \left\{\frac{a}{b} \,|\, a \in \mathbb{Z},\, b \in \mathbb{N},\, \frac{b}{4} \in \mathbb{N}\right\} \subseteq \mathbb{Q}$

שאלה 6: תהא G עם $n > 2$ איברים. הוכח כי לא קיימת $H \leq G$ עם $n - 1$ איברים.

שאלה 7: הוכיחו כי $S_3 \ncong \mathbb{Z}_6$.

שאלה 8: הוכיחו כי $\mathbb{Z}_4 \ncong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

שאלה 9: תהי $G = \langle a \rangle$ חבורה צקלית מסדר 12, מצאו ת"ח מסדר 4. (למה ברור שהת"ח היא צקלית?).

שאלה 10: תהי $H \leq G$, הוכיחו $Z(G) \cap H \subseteq Z(H)$.

שאלה 11: נתון $\phi : G_1 \to G_2$ הומומורפיזם בין חבורות. אברי היחידה הם בהתאמה: e_1 e_2.
הוכיחו:

(א) $\phi(e_1) = e_2$ [רמז: חשב $\phi(e_1 e_1)$]

(ב) $\phi(g^{-1}) = \phi(g)^{-1}$ לכל $g \in G_1$.

שאלה 12:

הגדרה: ההמופריזם $\phi : G_1 \to G_2$ המוגדר $\phi(g) = e_2$ לכל $g \in G_1$ נקרא ההומורפיזם הטריוואלי.

(א) מצא המומורפיזם לא טריוואלי מהחבורה החיבורית $\mathbb{Z}_3$ לחבורת התמורות S_3

(ב) הוכח שההומומורפיזם הטריאלי הוא ההומומורפיזם היחיד מ S_3 ל $\mathbb{Z}_3$

שאלה 13: תהא G חבורה. נגדיר $Aut(G)$ להיות קבוצת כל ההומומורפיזם $\phi : G \to G$ ההפיכים (כלומר חח"ע ועל)

(א) הוכח כי $Aut(G)$ חבורה ביחס לפעולת הרכבת פונקציות.

(ב) נגדיר הומורפיזם של חבורות

$$\Phi : G \to Aut(G)$$

ע"י $\Phi(x) = I_x$ כאשר I_x מוגדר להיות פונקציה ההצמדה. כלומר $I_x(g) = xgx^{-1}$.
הוכיחו כי Φ הומורפיזם (אין צורך להוכיח כי $I_x \in Aut(G)$) ומצאו $ker(\Phi)$.

שאלה 14: כל החבורות בתרגיל זה מוגדרות עם פעולת כפל

(א) נביט בהעתקה $\phi : (\mathbb{R} \backslash \{0\}) \to \{-1, 1\}$ המוגדרת על ידי $\phi(x) = \frac{x}{|x|}$ (לדוגמה: $\phi(-3) = -1$ $\phi(3) = 1$) הוכח ש ϕ המומורפיזם ומצא את הגרעין

(ב) : $\phi : (\mathbb{C} \backslash \{0\}) \to \mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$ המוגדרות על ידי $\phi(a + ib) = a^2 + b^2$.(לדוגמה: $\phi(1 + 2i) = 5$), הוכח שהיא הומומורפיזם ומצא את הגרעין . איזה צורה גיאומטרית יש לגרעין?