אנליזה מתקדמת למורים, פתרון תרגיל 2

28 באוקטובר 2020

1. הוכיחו שלכל שני מספרים מרוכבים שונים $z \neq w$ כך ש־ $|z| = |w|$ מתקיים: המספר $\frac{z+w}{z-w}$ הינו מדומה טהור (כלומר, $Re(\frac{z+w}{z-w}) = 0$).
פתרון:
נכפיל את המונה והמכנה בצמוד של המכנה:
$$\frac{z+w}{z-w} = \frac{(z+w)(\overline{z-w})}{(z-w)(\overline{z-w})} = \frac{(z+w)(\overline{z}-\overline{w})}{|z-w|^2} = \frac{z\overline{z} - z\overline{w} + w\overline{z} - w\overline{w}}{|z-w|^2}$$
כעת, המכנה כמובן ממשי, ונותר להראות שהמונה מדומה טהור וסיימנו. נשים לב: $z\overline{z} = |z|^2, w\overline{w} = |w|^2$ וכיון שנתון $|z| = |w|$ נקבל במונה שהם מבטלים אחד את השני: $z\overline{z} - w\overline{w} = |z|^2 - |w|^2 = 0$. בנוסף נשים לב ש־ $\overline{z\overline{w}} = w\overline{z}$, ולכן, אם נסמן $t = w\overline{z}$ נקבל: $w\overline{z} - z\overline{w} = t - \overline{t} = 2 \cdot Im(t)i$ שזהו מספר מדומה טהור. בסה"כ המונה מדומה טהור והמכנה ממשי, ולכן המספר כולו מדומה טהור.

2. מעבר בין הצגות.
(א) כתבו את המספרים הבאים בצורה קרטזית:
i. $5\text{cis}135°$
ii. $\text{cis}\frac{\pi}{3}$
(ב) כתבו את המספרים הבאים בצורה פולרית $z = r\text{cis}\theta$:
i. $-5i$
ii. $2-2i$
iii. 17.5
iv. $-2+i$
v. $-3-4i$
(ג) לכל אחד מהמספרים בסעיף הקודם, הציגו בצורה פולרית את $\overline{z}, -z$.
פתרון:
<u>חלק א</u>
א. $z = 5\cos 135 + 5\sin 135 \cdot i = -2.5\sqrt{2} + 2.5\sqrt{2}i$.
ב. $z = \cos\frac{\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{3} \cdot i = 0.5 + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.
<u>חלק ב</u>
א. זהו מספר מדומה טהור, ולכן הוא נמצא על הציר המדומה (ציר ה־y) בחלקו התחתון. לכן מרחקו מהראשית הוא 5, והזוית עם הכיוון החיובי של הציר הממשי (ציר ה־x) היא $\frac{3\pi}{2} = 270°$. בסה"כ נקבל $z = 5\text{cis}\frac{3\pi}{2}$.

ב. נחשב את הנורמה: $r=\sqrt{2^2+(-2)^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$. והזוית במחשבון: $\tan\theta=\frac{-2}{2}=-1\Rightarrow\theta=-\frac{\pi}{4}$, כיון שהמספר נמצא ברביע הרביעי זה אכן מתאים (ומי שלא אוהב מינוס יכול להוסיף 360°, ולקבל $\theta=315^\circ=\frac{7\pi}{4}$). בסה"כ: $z=2\sqrt{2}\text{cis}\frac{7\pi}{4}$.

ג. זהו מספר ממשי, ולכן נמצא על הצירה הממשי (ציר ה־x). לכן מרחקו מהראשית הוא 17.5, והזוית היא 0. בסה"כ: $z=17.5\text{cis}0$.

ד. רדיוס: $r=\sqrt{(-2)^2+1^2}=\sqrt{5}$, והזוית במחשבון: $\tan\theta=\frac{1}{-2}\Rightarrow\theta=-0.464$. זוית זו מתאימה לרביע הרביעי, ואילו המספר שלנו נמצא ברביע השני, לכן נוסיף $-0.464+\pi=2.678$. בסה"כ: $z=\sqrt{5}\text{cis}2.678$.

ה. רדיוס: $r=\sqrt{(-3)^2+(-4)^2}=5$. והזוית במחשבון: $\tan\theta=\frac{-4}{-3}=1\frac{1}{3}\Rightarrow\theta=0.927$. זוית זו מתאימה לרביע הראשון, ואילו המספר שלנו נמצא ברביע השלישי, לכן נוסיף $0.927+\pi=4.069$. בסה"כ: $z=5\text{cis}4.069$.

<u>חלק ג</u>

א. $\overline{z}=5\text{cis}\left(-\frac{3\pi}{2}\right), -z=5\text{cis}\left(\frac{\pi}{2}\right)$ (שימו לב שאם המספר מדומה טהור אז $-z=\overline{z}$, וזה אכן מה שקרה, ללכת רבע מעגל נגד כיוון השעון זה כמו ללכת 3 רבעים עם כיוון השעון).

ב. $\overline{z}=2\sqrt{2}\text{cis}\left(-\frac{7\pi}{4}\right), -z=2\sqrt{2}\text{cis}\left(\frac{11\pi}{4}\right)=2\sqrt{2}\text{cis}\left(\frac{3\pi}{4}\right)$

ג. $\overline{z}=17.5\text{cis}0, -z=17.5\text{cis}\pi$

ד. $\overline{z}=\sqrt{5}\text{cis}(-2.678), -z=\sqrt{5}\text{cis}(-0.464)$ (כאן בשאלת המינוס הורדנו π במקום להוסיף, אין הבדל. פשוט זו הזוית שכבר קיבלנו במחשבון, והיא התאימה בעצם ל־$-z$ ולא ל־z עצמו...).

ה. $\overline{z}=5\text{cis}(-4.069), -z=5\text{cis}(7.21)=5\text{cis}0.927$.

בהצלחה!