תרגיל 6 ליניארית להנדסה תשעח

להגשה בתרגול, בשבוע המתחיל ב־ ט"ו כסלו, 3.12

26 בנובמבר 2017

1. תהיינה $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ מטריצות. הוכיחו או הפריכו:
   א. אם A, B הפיכות וגם $A+B \neq 0$ אז $A+B$ הפיכה.
   ב. אם A הפיכה אז $tr(A) \neq 0$.
   ג. אם $A^2 = A$ אז $A = I$ או A איננה הפיכה.
   ד. אם ב־A יש עמודות אפסים אז A איננה הפיכה.

2. תהיינה $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ מטריצות, כך ש־A הפיכה. הוכיחו:
   v פיתרון למערכת $Bx = 0$ אם ורק אם v פתרון למערכת $(AB)x = 0$.

3. נתבונן במרחב הוקטורי $\mathbb{R}^{n\times n}$ כלומר, אוסף המטריצות הריבועיות מסדר n.
   א. הוכיחו שהבאים הינם תתי מרחבים של $\mathbb{R}^{n\times n}$:
   a) $U = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} | \forall i \neq j : A_{i,j} = 0\}$ כלומר, אוסף המטריצות האלכסוניות.
   b) $W = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} | \forall i, j : A_{i,j} = -A_{j,i}\}$ כלומר, אוסף המטריצות האנטי־סימטריות.
   c) $V = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} | tr(A) = 0\}$ כלומר, אוסף המטריצות עם עקבה 0.
   ב. הוכיחו או הפריכו:
   a) $U \cup W$ תת מרחב.
   b) $U \cup V$ תת מרחב.
   c) $W \cup V$ תת מרחב.

4. יהי V מ"ו, ויהיו $u = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \in V$ שני וקטורים. הוכיחו ש־u, v תלויים ליניארית אם ורק אם $ad - bc = 0$.

5. נתון תת המרחב הוקטורי הבא של $\mathbb{R}^4$:

$$U = span\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}\}$$

מצא מערכת מישוואות ליניארית (ניתן לייצגה גם ע"י מטריצה) שאוסף הפתרונות שלה הוא בדיוק U.

6. האם הקבוצה $B=\{1+x^2+2x^3, 5+x+6x^2+13x^3, -3-x-3x^2-8x^3\}\subseteq \mathbb{R}_3[x]$ תלויה ליניארית? אם כן, מצא צ"ל לא טריוויאלי שנותן 0; אם לא, הראה שהצ"ל היחיד שנותן 0 הוא הטריוויאלי.

7. נתבונן ב- $\mathbb{R}^{2\times 2}\supseteq\{A_1=\begin{pmatrix}1&8\\4&5\end{pmatrix}, A_2=\begin{pmatrix}0&2\\1&1\end{pmatrix}, A_3=\begin{pmatrix}1&9\\4&5\end{pmatrix}\}=B$. האם $\begin{pmatrix}5&39\\18&23\end{pmatrix}\in span(B)$? אם כן, מצאו את הצירוף הליניארי המתאים.

8. יהי V מ"ו ותהיינה $A,B\subseteq V$ תתי קבוצות. הוכיחו או הפריכו:

א. אם $A\cap B=\varnothing$ וגם $span(A)\cap span(B)\neq\{0\}$ אזי $A\cup B$ ת"ל.

ב. אם $span(A)\supseteq B\wedge span(B)\supseteq A$ אז $A=B$.