פתרון תרגיל בית 5, גאומטרי'ה אנליטית, זהבית צבי

סווגו את התבניות הבאות:

1. $x^2-2xy+y^2+x+y=0$
2. $52x^2+73y^2+72xy+120x+160y+75=0$
3. $5x^2+8xy+5y^2+x+3y=0$

פתרון

1. המטריצה של התבנית הנתונה כאן היא: $A=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}$, כאשר נשים לב כי האיברים $a_{12}=a_{21}=-1$ מייצגים מקדמים של $xy=yx$ בהתאמה.

התבנית נכתבת כך:

$$\underbrace{\begin{pmatrix}x&y\end{pmatrix}}_{X^t}\underbrace{\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}}_{X}+\begin{pmatrix}1&1\end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}}_{X}=0\ (*)$$

נמצא את הערכים העצמים ע"י פתרון המשוואה: $|A-\lambda I|=0$.

$$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}1-\lambda&-1\\-1&1-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)^2-1=1-2\lambda+\lambda^2-1=\lambda^2-2\lambda=0\Rightarrow\lambda_1=0,\ \lambda_2=2$$

נמצא את הווקטורים העצמים ע"י פתרון המערכת: $(A-\lambda I)v=0$ לכל ע"ע שמצאנו.

עבור $\lambda_1=0$:

$$\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}\xrightarrow{R_2-R_1\to R_2}\begin{pmatrix}1&-1\\0&0\end{pmatrix}\ x-y=0\Rightarrow x=y$$

נבחר שרירותית $y=1$ ונקבל מיד $x=1$ ומקבלים וקטור עצמי: $v_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.

נורמל: $\|v_1\|=\left\|\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$ והווקטור המנורמל: $u_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$.

עבור $\lambda_2=2$:

$$\begin{pmatrix}-1&-1\\-1&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{R_2-R_1\to R_2}\begin{pmatrix}-1&-1\\0&0\end{pmatrix}\ -x-y=0\Rightarrow x=-y$$

נבחר שרירותית $y=-1$ ונקבל מיד $x=1$ ומקבלים וקטור עצמי: $v_2=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$.

נרמל: $\|v_2\| = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$ והווקטור המנורמל: $u_2 = \sqrt{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.

המטריצה המלכסנת היא: $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ והאלכסונית הדומה היא: $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

נציב $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^t = \left[P\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\right]^t \Rightarrow \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix}P^t$

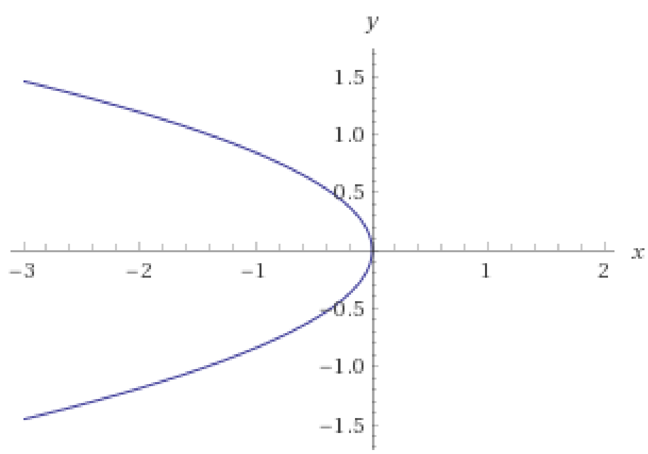
במשוואה (*) ונקבל:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}}_{X^t}\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{X} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{X} = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}_{D}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}}_{P^t}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$2y'^2 + \sqrt{2}x' = 0\,(:2) \Rightarrow y'^2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}x'$$

<u>איור ב</u> x' ו-y':



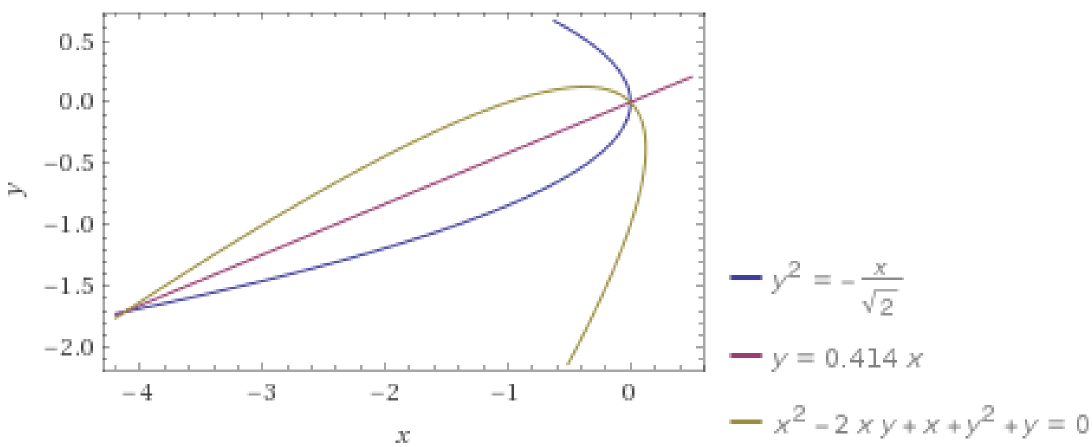
מכוון ש- $|P| = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1$ מדובר בפרבולה משוקפת.

מטריצת שיקוף כללית היא $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$.

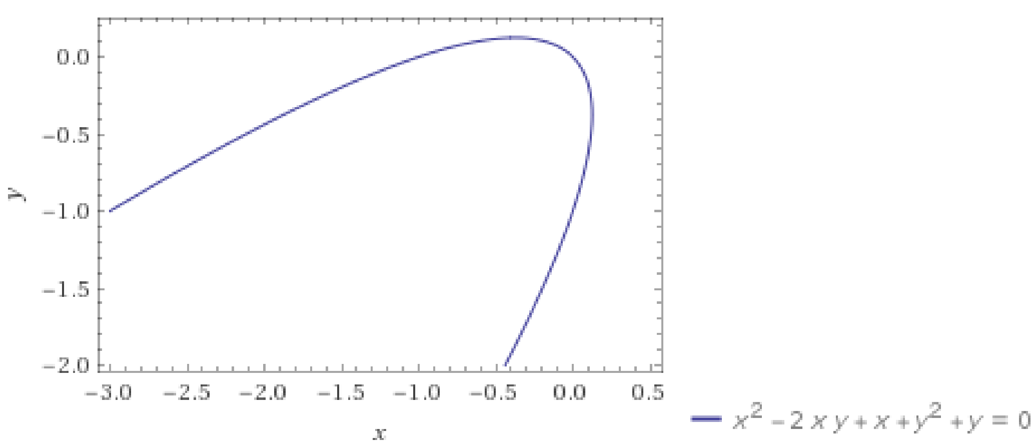
נציב $\theta = 45^\circ$ ונקבל את $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$, לכן ציר השיקוף הוא הישר $y = mx$ כאשר

$m = \tan\frac{\theta}{2} = \tan\frac{45^\circ}{2} = 0.414$ כלומר $y = 0.414x$.

האיור הבא משלב את הפרבולה לפי הצירים x' ו- y', את ציר השיקוף ואת הצורה המקורית במערכת צירים x, y:



הצורה המקורית



2. המטריצה של התבנית הנתונה כאן היא: $A=\begin{pmatrix}52&36\\36&73\end{pmatrix}$, כאשר נשים לב כי האיברים $a_{12}=a_{21}=36$ מייצגים מקדמים של $xy=yx$ בהתאמה.

התבנית נכתבת כך:

$$\underbrace{\begin{pmatrix}x&y\end{pmatrix}}_{X^t}\underbrace{\begin{pmatrix}52&36\\36&73\end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}}_{X}+\begin{pmatrix}120&160\end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}}_{X}+75=0\quad(*)$$

נמצא את הערכים העצמים ע"י פתרון המשוואה: $|A-\lambda I|=0$.

$$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}52-\lambda&36\\36&73-\lambda\end{vmatrix}=(52-\lambda)(73-\lambda)-1296=3796-52\lambda-73\lambda+\lambda^2-1296=\lambda^2-125\lambda+2500=0$$

$$\Rightarrow\lambda_1=100\,,\,\lambda_2=25$$

נמצא את הווקטורים העצמים ע"י פתרון המערכת: $(A-\lambda I)v=0$ לכל ע"ע שמצאנו.

עבור $\lambda_1=100$:

$$\begin{pmatrix}-48&36\\36&-27\end{pmatrix}\xrightarrow[\frac{1}{9}R_2\to R_2]{-\frac{1}{12}R_1\to R_1}\begin{pmatrix}4&-3\\4&-3\end{pmatrix}\xrightarrow{R_2-R_1\to R_2}\begin{pmatrix}4&-3\\0&0\end{pmatrix}\quad 4x-3y=0\Rightarrow x=\frac{3}{4}y$$

נבחר שרירותית $y=4$ ונקבל מיד $x=3$ ומקבלים וקטור עצמי: $v_1=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$.

ננרמל: $\|v_1\|=\left\|\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}\right\|=\sqrt{3^2+4^2}=5$ והווקטור המנורמל: $u_1=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3}{5}\\\frac{4}{5}\end{pmatrix}$.

עבור $\lambda_2=25$:

$$\begin{pmatrix}27&36\\36&48\end{pmatrix}\xrightarrow[\frac{1}{12}R_2\to R_2]{\frac{1}{9}R_1\to R_1}\begin{pmatrix}3&4\\3&4\end{pmatrix}\xrightarrow{R_2-R_1\to R_2}\begin{pmatrix}3&4\\0&0\end{pmatrix}\quad 3x+4y=0\Rightarrow x=-\frac{4}{3}y$$

נבחר שרירותית $y=3$ ונקבל מיד $x=-4$ ומקבלים וקטור עצמי: $v_2=\begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix}$.

ננרמל: $\|v_2\|=\left\|\begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix}\right\|=\sqrt{(-4)^2+3^2}=5$ והווקטור המנורמל:

$$u_2=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{4}{5}\\\frac{3}{5}\end{pmatrix}$$

המטריצה המלכסנת היא $P=\begin{pmatrix}\frac{3}{5} & -\frac{4}{5}\\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5}\end{pmatrix}$ והאלכסונית הדומה היא $D=\begin{pmatrix}100 & 0\\ 0 & 25\end{pmatrix}$.

נציב $\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}^t=\left[P\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}\right]^t\Rightarrow\begin{pmatrix}x & y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x' & y'\end{pmatrix}P^t$

במשוואה (*) ונקבל:

$$\underbrace{\begin{pmatrix}x & y\end{pmatrix}}_{X^t}\underbrace{\begin{pmatrix}52 & 36\\ 36 & 73\end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}}_{X}+\begin{pmatrix}120 & 60\end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}}_{X}+75=0\Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix}x' & y'\end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix}100 & 0\\ 0 & 25\end{pmatrix}}_{D=P^tAP}\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}+\underbrace{\begin{pmatrix}120 & 60\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{3}{5} & -\frac{4}{5}\\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5}\end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix}200 & 0\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}+75=0\Rightarrow$$

$$100x'^2+25y'^2+200x'=-75$$

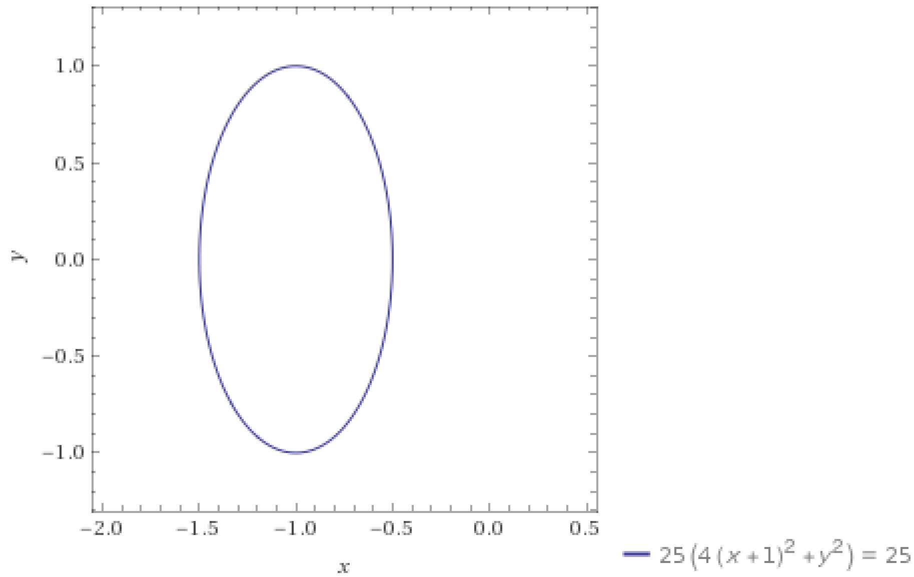
כעת נבצע השלמה לריבוע:

$$100x'^2+25y'^2+200x'=-75\Rightarrow\underbrace{\left\{\Big(\underset{u}{10x'}\Big)^2+2\cdot\underset{u}{10x'}\cdot\underset{v}{10}+\underset{v}{10}^2\right\}}_{(u+v)^2}-10^2+25y'^2=-75\Rightarrow$$

$$(10x'+10)^2+25y'^2=-75+100=25\Rightarrow\left(10(x'+1)\right)^2+25y'^2=25\Rightarrow100(x'+1)^2+25y'^2=25\ (:25)$$

$$\Rightarrow\frac{(x'+1)^2}{\frac{1}{4}}+\frac{y'^2}{1}=1$$

<u>איור לפי הצירים</u> x' ו-y' :



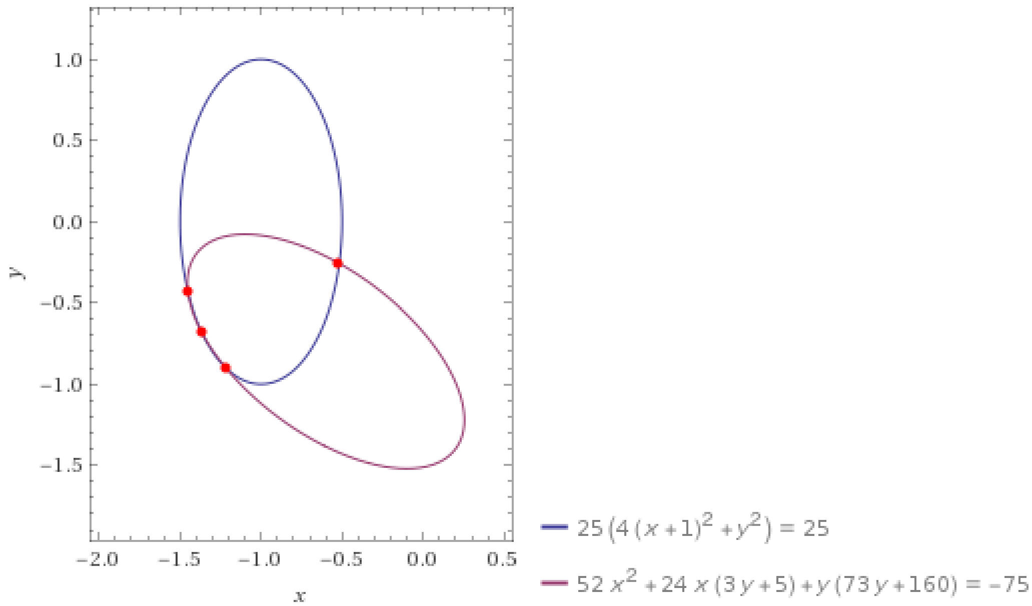
מכוון ש-$|P|=\frac{16}{25}+\frac{9}{25}=1$ מדובר באליפסה מסובבת.

מטריצת סיבוב כללית היא $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

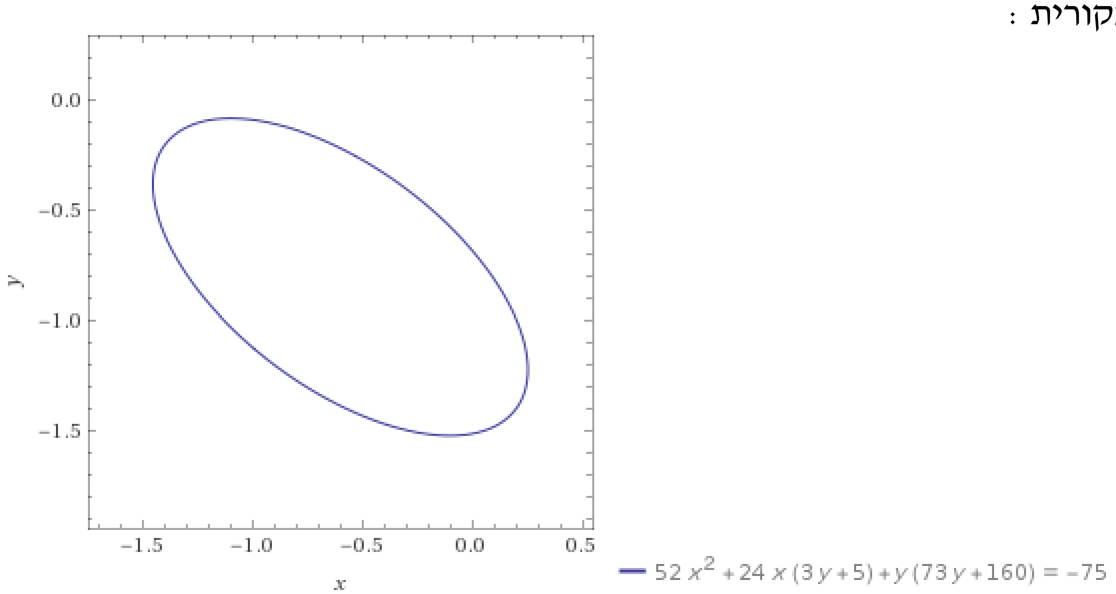
המטריצה $P=\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$ ולכן זווית הסיבוב היא:

$\theta = arccos\frac{3}{5} = 53.13^{\circ}$.

האיור הבא משלב את האליפסה לפי הצירים x' ו-y' ואת הצורה המקורית לאחר הסיבוב.



הצורה המקורית :



3. המטריצה של התבנית הנתונה כאן היא : $A=\begin{pmatrix}5&4\\4&5\end{pmatrix}$, כאשר נשים לב כי האיברים $a_{12}=a_{21}=4$ מייצגים מקדמים של $xy=yx$ בהתאמה.

המשוואה הנתונה נכתבת כך : $(*)$ $\;(x\quad y)\underset{\begin{pmatrix}5&4\\4&5\end{pmatrix}}{A}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+(1\quad 3)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=0$

נמצא את הערכים העצמים ע"י פתרון המשוואה : $|A-\lambda I|=0$.

$$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}5-\lambda & 4\\ 4 & 5-\lambda\end{vmatrix}=(5-\lambda)^2-16=25-10\lambda+\lambda^2-16=\lambda^2-10\lambda+9=0\Rightarrow\lambda_1=9\,,\,\lambda_2=1$$

נמצא את הווקטורים העצמים ע"י פתרון המערכת: $(A-\lambda I)v=0$ לכל ע"ע שמצאנו.

עבור $\lambda_1=9$:

$$\begin{pmatrix}-4 & 4\\ 4 & -4\end{pmatrix}\overset{R_1+R_2\to R_1}{\to}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 4 & -4\end{pmatrix}\ 4x-4y=0\Rightarrow x=y$$

נבחר שרירותית $y=1$ ונקבל מיד $x=1$ ומקבלים וקטור עצמי: $v_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.

נורמל: $\|v_1\|=\left\|\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$ והווקטור המנורמל: $u_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$.

עבור $\lambda_2=1$:

$$\begin{pmatrix}4 & 4\\ 4 & 4\end{pmatrix}\overset{R_2-R_1\to R_2}{\to}\begin{pmatrix}4 & 4\\ 0 & 0\end{pmatrix}\ 4x+4y=0\Rightarrow x=-y$$

נבחר שרירותית $y=-1$ ונקבל מיד $x=1$ ומקבלים וקטור עצמי: $v_2=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$.

נורמל: $\|v_2\|=\left\|\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right\|=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$ והווקטור המנורמל: $u_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$.

המטריצה המלכסנת היא: $P=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$ והאלכסונית הדומה היא: $D=\begin{pmatrix}9 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

נציב $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}^t=\left[P\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}\right]^t\Rightarrow(x\quad y)=(x'\quad y')P^t$ בתבנית ריבועית ונקבל:

$$(x'\quad y')\underbrace{P^tAP}_{D=\begin{pmatrix}9&0\\0&1\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}+\underbrace{(1\quad 3)\underbrace{P}_{P=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}}}_{\left(\frac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}\quad -\frac{2}{\sqrt{2}}=-\sqrt{2}\right)}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=0\Rightarrow 9x'^2+y'^2+2\sqrt{2}x'-\sqrt{2}y'=0$$

כעת נעשה השלמות לריבוע בכדי להכניס מחוברים ממעלה ראשונה לתוך סכום (או הפרש) ריבועים בעזרת נוסחאות הכפל המקוצר $(u\pm v)^2=u^2\pm 2uv+v^2$:

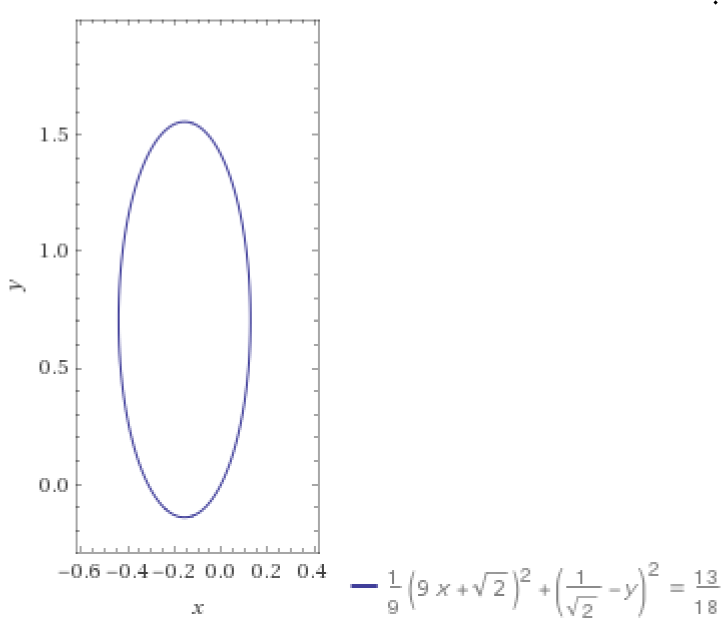
$$\left\{\underbrace{(3x')}_{u}^{2}+2\underbrace{(3x')}_{u}\cdot\underbrace{\frac{\sqrt{2}}{3}}_{v}+\underbrace{\left(\underbrace{\frac{\sqrt{2}}{3}}_{v}\right)^{2}}_{\frac{2}{9}}\right\}-\frac{2}{9}+\left\{\left(\underbrace{y'}_{u}\right)^{2}-2\cdot\underbrace{y'}_{u}\cdot\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}}_{v}+\underbrace{\left(\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}}_{v}\right)^{2}}_{\frac{1}{2}}\right\}-\frac{1}{2}=0\Rightarrow$$

$$\left(3x'+\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^{2}+\left(y'-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2}=\frac{2}{9}+\frac{1}{2}=\frac{13}{18}\Rightarrow\left(3\left(x'+\frac{\sqrt{2}}{9}\right)\right)^{2}+\left(y'-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2}=\frac{13}{18}\Rightarrow$$

$$9\left(x'+\frac{\sqrt{2}}{9}\right)^{2}+\left(y'-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2}=\frac{13}{18}\left(:\frac{13}{18}\right)\Rightarrow\frac{\left(x'+\frac{\sqrt{2}}{9}\right)^{2}}{\frac{13}{162}}+\frac{\left(y'-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2}}{\frac{13}{18}}=1$$

זו אליפסה.

<u>איור לפי הצירים</u> x' ו-y' :



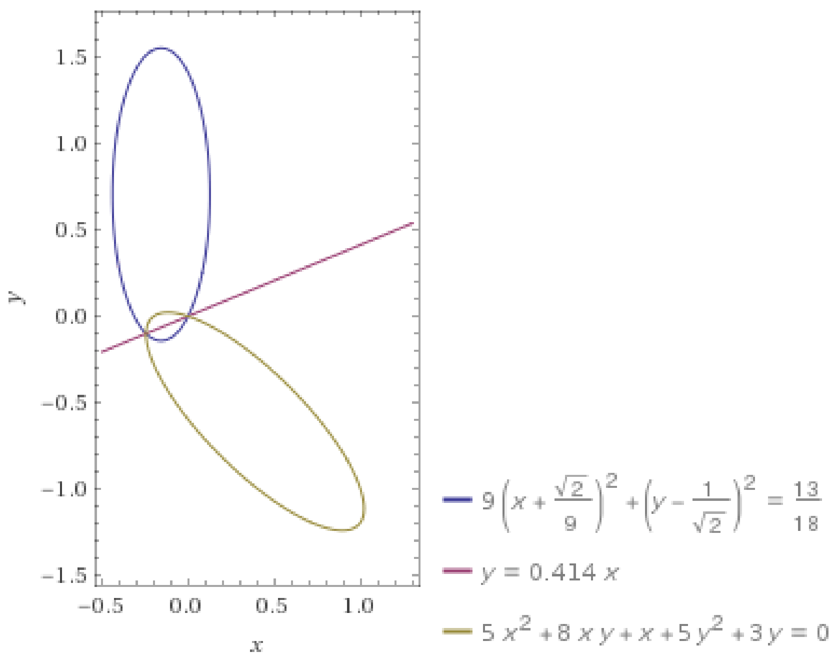
מכוון ש-$|P|=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=-1$ מדובר באליפסה משוקפת.

מטריצת שיקוף כללית היא $\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix}$.

נציב $\theta = 45^\circ$ ונקבל את $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$, לכן ציר השיקוף הוא הישר $y = mx$ כאשר

$m = \tan\frac{\theta}{2} = \tan\frac{45^\circ}{2} = 0.414$ כלומר $y = 0.414x$.

האיור הבא משלב את האליפסה לפי הצירים x' ו- y' , את ציר השיקוף ואת הצורה המקורית במערכת צירים x, y :



הצורה המקורית לפי הצירים x ו- y :