תרגול 2 – אינפי 1

<u>תרגיל</u>

הוכיחו ש- $\sqrt{2}$ אינו רציונאלי.

<u>הוכחה</u>

נניח בשלילה כי $\sqrt{2}\in\mathbb{Q}$. לכן ניתן לכתוב אותו כשבר מצומצם $\sqrt{2}=\frac{m}{n}$ עבור $m,n\in\mathbb{Z}$. נעלה את הביטוי בריבוע ונקבל: $2=\frac{m^2}{n^2}$ או $2n^2=m^2$ (*). כלומר, קיבלנו ש- m^2 הוא מספר זוגי, ולכן גם m מספר זוגי (מדוע?). כעת ניתן לרשום את m כ- $m=2p$ עבור מספר שלם כלשהו p. נציב זאת ב-(*) ונקבל: $2n^2=4p^2$. לאחר צמצום נקבל $n^2=2p^2$ ולכן n הוא מספר זוגי. כלומר, קיבלנו שגם m וגם n הם מספרים זוגיים, בסתירה לכך שהשבר $\frac{m}{n}$ היה מצומצם. לכן $\sqrt{2}$ אינו רציונאלי.

מש"ל

<u>חסמים</u>

<u>הגדרות</u>

תהי $A\subseteq\mathbb{R}$ תת קבוצה.

1. $M\in\mathbb{R}$ נקרא "חסם מלעיל" של A אם מתקיים: $\forall a\in A\ :\ a\le M$.
   לדוגמא: 2 הוא חסם מלעיל של הקבוצה $A=(0,1)$.
2. $m\in\mathbb{R}$ נקרא "חסם מלרע" של A אם מתקיים: $\forall a\in A: a\ge m$.
   לדוגמא: (-1) הוא חסם מלרע של $A=(0,1)$.
3. חסם מלעיל M של A נקרא "חסם עליון" של A אם אין ל- A חסם מלעיל הקטן ממנו ממש. נסמן $M=\sup A$. במילים אחרות: $\sup A=\min\{M : M$ חסם מלעיל של $A\}$.
   (אם הקבוצה אינה חסומה מלעיל, נאמר $\sup A=\infty$)
   לדוגמא: $\sup(0,1)=1$.
4. חסם מלרע m של A נקרא "חסם תחתון" של A אם אין ל- A חסם מלרע הגדול ממש מ- m. נסמן $\inf A=m$. במילים אחרות: $\inf A=\max\{m : m$ חסם מלרע של $A\}$.
   (אם הקבוצה אינה חסומה מלרע, נאמר $\inf A=-\infty$)
   לדוגמא: $\inf(3,4)=3$.
5. חסם עליון M של A נקרא "מקסימום" של A אם $M\in A$.
   לדוגמא: אם $A=\{x\in\mathbb{R}: x^2+3x-4\le 0\}$ אזי $\max A=1$.
6. חסם תחתון m של A נקרא "מינימום" של A אם $m\in A$.
   לדוגמא: בדוגמא הקודמת $\min A=-4$.

דוגמא נוספת: אם $A=\left\{x\in\mathbb{R}:0<x^2<3\right\}$ אזי אין ל-A מינימום ומקסימום, אך יש לה סופרמום ואינפימום: $\sup A=\sqrt{3}$, $\inf A=-\sqrt{3}$.

<u>הערה</u>

תהי $A\subseteq\mathbb{R}$ תת קבוצה, ויהיו $M,m\in\mathbb{R}$. אזי:

1. M חסם עליון של A אם ורק אם M חסם מלעיל של A <u>וגם</u> לכל $0<\varepsilon\in\mathbb{R}$ קיים $a\in A$ כך ש- $a>M-\varepsilon$ (במילים אחרות: אם $M'<M$ אזי M' אינו חסם מלעיל של A).
2. m חסם תחתון של A אם ורק אם m חסם מלרע של A <u>וגם</u> לכל $0<\varepsilon\in\mathbb{R}$ קיים $a\in A$ כך ש- $a<m+\varepsilon$ (במילים אחרות: אם $m<m'$ אזי m' אינו חסם מלרע של A).

<u>תרגיל</u>

נתון ש- $S\subseteq T$. מה הקשר בין $\sup S$ לבין $\sup T$?

<u>פתרון</u>

יהי M חסם מלעיל של T. אזי $\forall x\in T:x\leq M$. מכיוון ש- $S\subseteq T$ מתקיים $\forall x\in S:x\leq M$. לכן M חסם מלעיל של S. $\sup T$ הינו חסם מלעיל של T ולכן גם חסם מלעיל של S. לכל N חסם מלעיל של S מתקיים $\sup S\leq N$ ולכן $\sup S\leq\sup T$.

מש"ל

<u>שלילות של הגדרות</u>

- M אינו חסם מלעיל של A אמ"מ קיים $a\in A$ כך ש- $a>M$.
- m אינו חסם מלרע של A אמ"מ קיים $a\in A$ כך ש- $a<m$.
- M אינו חסם עליון אמ"מ M אינו חסם מלעיל <u>או</u> קיים חסם מלעיל הקטן ממנו ממש.
- m אינו חסם תחתון אמ"מ m אינו חסם מלרע <u>או</u> קיים חסם מלרע הגדול ממנו ממש.

<u>טענה</u>

יהיו $x,y\in\mathbb{R}$. אזי $x\geq y$ אם ורק אם $x+\varepsilon>y$ לכל $0<\varepsilon\in\mathbb{R}$.

<u>הוכחה</u>

$\Leftarrow$: יהי $\varepsilon>0$. אזי $x+\varepsilon>x\geq y$ ולכן $x+\varepsilon>y$.

$\Rightarrow$: נניח בשלילה ש- $x<y$ ונסמן את ההפרש שלהם $0<\delta=y-x$. אזי מתקיים $x+\delta=x+\left(y-x\right)=y>y$ וזאת סתירה. לכן $x\geq y$.

מש"ל

<u>תרגיל</u>

תהיינה $S,T\neq\varnothing$ קבוצות חסומות. אזי $\sup(S+T)=\sup S+\sup T$.

<u>פתרון</u>

נוכיח שני אי-שוויונים:

$\leq$: לכל $s\in S$ מתקיים $s\leq\sup S$ וגם לכל $t\in T$ מתקיים $t\leq\sup T$. לכן, $s+t\leq\sup S+\sup T$ ולכן $\sup(S+T)\leq\sup S+\sup T$.

$\geq$: על פי הטענה מספיק להוכיח שלכל $\varepsilon>0$ מתקיים: $\sup(S+T)+\varepsilon>\sup S+\sup T$. זה שקול ל- $\sup(S+T)>\left(\sup S-\frac{\varepsilon}{2}\right)+\left(\sup T-\frac{\varepsilon}{2}\right)$.

$\sup S-\frac{\varepsilon}{2}$ אינו חסם מלעיל של S ולכן קיים $s_0\in S$ עבורו $\sup S-\frac{\varepsilon}{2}<s_0$. באופן דומה קיים $t_0\in T$ עבורו $\sup T-\frac{\varepsilon}{2}<t_0$. מאידך, ברור ש- $\sup(S+T)\geq s_0+t_0$, וזה מוכיח את הדרוש.

מש"ל

<u>תרגיל</u>

תהי $A=\left\{\frac{1}{n^2}+2\cdot(-1)^n \ :\ n\in\mathbb{N}\right\}$. מצאו מינימום, מקסימום, חסם עליון וחסם תחתון (במידה וקיימים).

<u>פתרון</u>

ראשית, נתבונן במספר איברי הקבוצה על מנת לקבל הערכה כלשהי:
$A=\left\{-1,2\frac{1}{4},-1\frac{8}{9},2\frac{1}{16},\ldots\right\}$. אנו מעריכים ש- $2\frac{1}{4}$ הוא חסם מלעיל ששייך לקבוצה (ולכן הוא גם סופרמום וגם מקסימום). כמו כן, אנו מעריכים ש- (-2) הוא חסם תחתון שאינו שייך לקבוצה (ולכן אין לקבוצה מינימום).

א. נוכיח ש- $2\frac{1}{4}$ הוא חסם מלעיל. צריך להוכיח שלכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים $\frac{1}{n^2}+2\cdot(-1)^n\leq 2+\frac{1}{4}$. עבור $n=1$ הטענה ברורה. עבור $n\geq 2$ מתקיים: $\frac{1}{n^2}+2\cdot(-1)^n\leq\frac{1}{n^2}+2\leq 2+\frac{1}{4}$, שכן עבור $n\geq 2$ מתקיים $\frac{1}{n^2}\leq\frac{1}{4}$.

ב. כעת נוכיח ש- (-2) הינו חסם מלרע. צריך להוכיח שלכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים $\frac{1}{n^2}+2\cdot(-1)^n>-2$. ואכן, $\frac{1}{n^2}+2\cdot(-1)^n\geq\frac{1}{n^2}-2>-2$.

ג. נוכיח ש- (-2) חסם תחתון. צריך להוכיח שלכל $\varepsilon > 0$ קיים $a \in A$ כך ש- $a < -2+\varepsilon$.
יהי $\varepsilon > 0$. נמצא $n \in \mathbb{N}$ כך ש- $\frac{1}{n^2} + 2\cdot(-1)^n < -2+\varepsilon$. יהי $n_0 \in \mathbb{N}$ אי זוגי עבורו מתקיים $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$ (הטבעיים לא חסומים מלעיל). עבורו יתקיים גם $\frac{1}{{n_0}^2} - 2 < -2+\varepsilon$, כדרוש.

ד. נותר להראות שלא קיים מינימום, כלומר: $(-2) \notin A$. ואכן, לא קיים $n \in \mathbb{N}$ עבורו $\frac{1}{n^2} + 2\cdot(-1)^n = -2$ שכן הראינו שלכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $\frac{1}{n^2} + 2\cdot(-1)^n > -2$.

מש"ל