חשבון אינפי 1 למדמ"ח

תרגיל 10-פתרון

1. חשבו את הגבולות הבאים (היעזרו בכלל לופיטל) :

א. $\lim_{x\to-\infty}\frac{x+x^{-1}}{1+\sqrt{1-x}}$

הגבול הינו מהצורה "$\frac{\infty}{\infty}$" הנגזרת של המכנה $\left(1+\sqrt{1-x}\right)'=\frac{-1}{2\sqrt{1-x}}\neq 0$ עבור $(-\infty,1)$ ולכן נפעיל את כלל לופיטל

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x+x^{-1}}{1+\sqrt{1-x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1-x^{-2}}{\frac{-1}{2\sqrt{1-x}}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(x^2-1\right)2\sqrt{1-x}}{-x^2}=\lim_{x\to-\infty}2\left(-1+\frac{1}{x^2}\right)\sqrt{1-x}=-\infty$$

ב. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 3x}{\frac{\pi}{2}-x}$

הגבול הינו מהצורה "$\frac{0}{0}$", הנגזרת של המכנה $\left(\frac{\pi}{2}-x\right)'=-1\neq 0$ לכל x ולכן נשתמש בכלל לופיטל:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 3x}{\frac{\pi}{2}-x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-3\sin 3x}{-1}=-3$$

ג. $\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{e^x-x-1}$

הגבול הינו מהצורה "$\frac{0}{0}$", הנגזרת של המכנה $\left(e^x-x-1\right)'=e^x-1\neq 0$ בסביבה מנוקבת של $x=0$ ולכן נשתמש בכלל לופיטל:

$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{e^x-x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{e^x-1}$ הגבול עדיין מהצורה "$\frac{0}{0}$" ולכן שוב נפעיל את כלל לופיטל: $\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{e^x-x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{e^x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{e^x}=2$

ד. $\lim_{x\to 1}\left(2-x\right)^{\tan\frac{\pi}{2}x}$

הגבול הינו מהצורה "1^{∞}"

$$y=(2-x)^{\tan\frac{\pi}{2}x}$$

$$\ln y=\tan\left(\frac{\pi}{2}x\right)\ln(2-x)$$

$$\lim_{x\to1}\ln y=\lim_{x\to1}\tan\left(\frac{\pi}{2}x\right)\ln(2-x)\overset{\infty\cdot0}{=}\lim_{x\to1}\frac{\ln(2-x)}{\cot\left(\frac{\pi}{2}x\right)}$$

$$\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to1}\frac{\frac{-1}{(2-x)}}{\frac{1}{-\sin^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)}\cdot\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{\pi}\lim_{x\to1}\frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{2-x}=\frac{2}{\pi}$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to1}(2-x)^{\tan\frac{\pi}{2}x}=e^{2/\pi}$$

ה. $\lim_{x\to\infty}\left(1+x^2\right)^{1/\ln x}$

הגבול הינו מהצורה "∞^0"

$$y=\left(1+x^2\right)^{1/\ln x}$$

$$\ln y=\frac{1}{\ln x}\ln\left(1+x^2\right)$$

$$\lim_{x\to\infty}\ln y=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+x^2\right)}{\ln x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x}{\left(1+x^2\right)}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2}{\left(1+x^2\right)}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\left(\underbrace{\frac{1}{x^2}}_{\to0}+1\right)}=2$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to\infty}\left(1+x^2\right)^{1/\ln x}=e^2$$

ו. $\lim_{x\to\infty}\left(x-\ln\left(1+2e^x\right)\right)$ רמז: $\left(x-\ln\left(1+2e^x\right)\right)=\ln e^{\left(x-\ln\left(1+2e^x\right)\right)}$

הגבול הינו מהצורה "$\infty-\infty$"

$$y=e^{\left(x-\ln\left(1+2e^x\right)\right)}=\frac{e^x}{1+2e^x}$$

$$\lim_{x\to\infty}y=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{1+2e^x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{2e^x}=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to\infty}\left(x-\ln\left(1+2e^x\right)\right)\overset{\infty-\infty}{=}\ln\frac{1}{2}=-\ln 2$$

ז. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sin(\pi x)\ln x}{1+\cos(\pi x)}$

הגבול הינו מהצורה "$\frac{0}{0}$" והתנאים של כלל לופיטל מתקיימים ולכן :

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sin(\pi x)\ln x}{1+\cos(\pi x)}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 1}\frac{\pi\cos(\pi x)\ln x+\frac{\sin(\pi x)}{x}}{-\pi\sin(\pi x)}=\lim_{x\to 1}\frac{\cos(\pi x)\ln x}{-\sin(\pi x)}-\frac{1}{\pi x}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{-\pi\sin(\pi x)\ln x+\frac{\cos(\pi x)}{x}}{-\pi\cos(\pi x)}-\frac{1}{\pi x}=-\frac{2}{\pi}$$

ח. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\tan x}{\sqrt{1-x^2}-1}$

הגבול הינו מהצורה "$\frac{0}{0}$" והתנאים של כלל לופיטל מתקיימים ולכן

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\tan x}{\sqrt{1-x^2}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x+\frac{x}{\cos^2 x}}{\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}}=\lim_{x\to 0}\sqrt{1-x^2}\left(-\frac{\tan x}{x}-\frac{1}{\cos^2 x}\right)=1\cdot(-1-1)=-2$$

2. עבור הגבול $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2-4x}{2x}=-2$ מצאו $\delta>0$ ממשי כך שלכל $0<|x|<\delta$ מתקיים $\left|\frac{x^2-4x}{2x}-(-2)\right|<0.1$.

פתרון:

$\left|\frac{x^2-4x}{2x}-(-2)\right|<0.1$ אם ורק אם $\left|\frac{x^2-4x+4x}{2x}\right|=\left|\frac{x}{2}\right|<0.1$ ו- $x\neq 0$ אם ורק אם $0<|x|<0.2$ ולכן מספיק לבחור $\delta\leq 0.2$.

3. עבור הגבול $\lim\limits_{x\to -\infty}\sqrt[3]{x-1}=-\infty$ מצאו $B>0$ ממשי כך שלכל $x<-B$ מתקיים $\sqrt[3]{x-1}<-100$.

פתרון:

$\sqrt[3]{x-1}<-100$ אם ורק אם $x-1<-10^6$ אם ורק אם $x<1-10^6$ ולכן מספיק לבחור $B>10^6-1$.

4. השתמשו בהגדרת הגבול במונחים של ε,δ על מנת להוכיח ש- $\lim\limits_{x\to 1}\frac{3x+1}{x}=4$.

הוכחה: יהי $\varepsilon > 0$ ממשי . צריך למצוא $\delta > 0$ ממשי כך שלכל x המקיים $|x-1| < \delta$ מתקיים $\left|\frac{3x+1}{x} - 4\right| < \varepsilon$.

$$\left|\frac{3x+1-4x}{x}\right| = \left|\frac{1-x}{x}\right| = \left|\frac{x-1}{x}\right|$$

ניקח $\delta = \frac{1}{2}$

במקרה זה $|x-1| < \frac{1}{2}$ כלומר $-\frac{1}{2} < x-1 < \frac{1}{2}$ ולכן $\frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}$ ומכאן $\frac{2}{3} < \frac{1}{x} < 2$.

ולכן $\left|\frac{3x+1-4x}{x}\right| = \left|\frac{1-x}{x}\right| = \left|\frac{x-1}{x}\right| = |x-1| \cdot \frac{1}{|x|} < 2\delta < \varepsilon$ כלומר $\delta < \frac{\varepsilon}{2}$

לסיכום מספיק לבחור $\delta < \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{\varepsilon}{2}\right\}$ ממשי.

5. השתמשו בהגדרת הגבול במונחים של A, δ על מנת להוכיח ש- $\lim_{x \to 2^-} \frac{5}{\sqrt{2-x}} = \infty$.

הוכחה: יהי $A > 0$ ממשי צריך למצוא $\delta > 0$ ממשי כך שלכל x המקיים $2-\delta < x < 2$ מתקיים $\frac{5}{\sqrt{2-x}} > A$.

$\frac{5}{\sqrt{2-x}} > A$ אם ורק אם $5 > A\sqrt{2-x}$ אם ורק אם $25 > 2A^2 - A^2x$ ו- $x < 2$ אם ורק אם $x > \frac{2A^2-25}{A^2} = 2 - \frac{25}{A^2}$ ו- $x < 2$ כלומר אם ורק אם $2 - \frac{25}{A^2} < x < 2$ ולכן מספיק לבחור $\delta < \frac{25}{A^2}$ ממשי.

6. בכל אחד מהסעיפים הבאים נסחו את הטענה המבוקשת או השלימו את החסר :

א. תהי f פונקציה המוגדרת בסביבה כלשהי של נקודה c כולל הנקודה עצמה. f נקראת **רציפה בנקודה** $x = c$ אם לכל $\varepsilon > 0$ ממשי קיים $\delta > 0$ ממשי כך שלכל x המקיים $|x-c| < \delta$ מתקיים $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$.

ב. נסחו במונחים של ε, δ את הטענה : לפונקציה f אין גבול בנקודה c .

תשובה:

לפונקציה f אין גבול בנקודה c אם לכל $L \in \mathbb{R}$ קיים $\varepsilon > 0$ ממשי כך שלכל $\delta > 0$ ממשי קיים x המקיים $0 < |x-c| < \delta$ כך ש- $|f(x) - L| \geq \varepsilon$

ג. תהי f פונקציה המוגדרת בסביבה הימנית של הנקודה $c \in \mathbb{R}$ וכן לכל $x \approx c, x > c$ מתקיים $f(x) \approx L$. נסחו טענה זו במונחים של ε, δ .

תשובה: לכל $\varepsilon > 0$ ממשי קיים $\delta > 0$ ממשי כך שלכל x המקיים

$c<x<c+\delta$ מתקיים $|f(x)-L|<\varepsilon$.

ד. תהי $f(x)$ פונקציה המוגדרת בסביבה השמאלית של $x=2$ כולל הנקודה עצמה.
קיים $\varepsilon>0$ ממשי כך שלכל $\delta>0$ ממשי קיים x המקיים $2-\delta<x<2$ כך ש- $|f(x)-f(2)|\geq\varepsilon$. נסחו טענה זו במונחים של אינפיניטסימלים. מה ניתן לומר על התנהגות של הפונקציה משמאל לנקודה $x=2$?
תשובה: קיים $x<2$ כך ש- $x\approx 2$ אבל $f(x)\not\approx f(2)$.
במקרה זה הפונקציה לא רציפה משמאל בנקודה $x=2$.