אלגברה לינארית להנדסה- בוחן (83-110) - פתרון

11.12.2019

הנחיות :

- מרצים : ד״ר ארז שיינר וד״ר שפרה רייף, מתרגלים : אריאל ויצמן, אמונה ליפסקר, יפעת מועדים לשמחה, ישי זגדון ועוזי חרוש.
- ענו על כל השאלות. יש לנמק כל תשובה!!
- רשמו ת.ז. ואת שמכם המלא על הכריכה ואת שם **המתרגל שאליו אתם הולכים.**
- משך הבוחן : שעה וחצי.
- חומר עזר : מחשבון פשוט בלבד.
- **ענו אך ורק בשאלון הבחינה.**
- השאלות לא מסודרות בהכרח לפי רמת קושי, מומלץ להתחיל עם שאלות אותן אתם יודעים לפתור.
- סימון : האיבר בשורה ה-i ועמודה ה-j של המטריצה A מסומן כ-A_{ij}.

תרגיל 1.

1. עבור אילו ערכי k יש למערכת

$$\begin{cases} x + y + z + w = 1 \\ x + ky + z + w = 1 \\ x + y + k^2 z + w = k \end{cases}$$

(א) אין פתרון

(ב) אינסוף פתרונות

(ג) פתרון יחיד

2. עבור $k=1$ מצא את הפתרון הכללי של המערכת.

פתרון.

(א) נרשום את המערכת המשוואות כמטריצה ונדרג אותה

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k^2 & 1 & k \end{array}\right) \xrightarrow[R_3-R_1]{R_2-R_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & k-1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k^2-1 & 0 & k-1 \end{array}\right)$$

אם $k=-1$ אז בשורה השלישית יהיה רשום $0=-2$ לכן במצב זה נקבל שאין פתרון, אם $k=1$ אז השורות השנייה והשלישית מתאפסות יש לנו אינסוף פתרונות עם 3 דרגות חופש, ואם $k\neq 1,-1$ אז אף שורה אינה מתאפסת אבל עדיין המערכת עם 4 משתנים ושלוש משוואות לכן יש לנו אינסוף פתרונות עם דרגת חופש אחת, לסיכום :

i. אין פתרון : $k=-1$

ii. אינסוף פתרונות : $k\neq -1$

iii. פתרון יחיד : ϕ

(ב) נציב $k=1$ ונקבל שכל המערכת הופכת להיות משוואה אחת,

$$x+y+z+w=1$$

לכן הפתרון הכללי הינו

$$(1-y-z-w, y, z, w)$$

תרגיל 2. תהי

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0&\cdots&0\\0&2&0&\cdots&\vdots\\0&0&3&\ddots&0\\\vdots&\cdots&\ddots&\ddots&0\\0&\cdots&0&0&n\end{pmatrix}_{n\times n}$$

כלומר $A_{ij}=\begin{cases}0 & i\neq j\\ i & i=j\end{cases}$, ותהי $B\in\mathbb{R}^{n\times n}$. הוכיחו $AB=BA$ אם ורק אם B אלכסונית כלומר $\forall i\neq j:\ B_{ij}=0$

פתרון.
($\Leftarrow$) נתון ש-$AB=BA$ צריך להוכיח ש-B אלכסונית משמע $\forall i\neq j\ B_{ij}=0$, נוכיח זאת

$$\begin{gathered}AB=BA\\\Downarrow\\\forall i\neq j:\ (AB)_{ij}=(BA)_{ij}\end{gathered}$$

ננתח כל אגף בנפרד

$$(AB)_{ij}=\sum_{k=1}^{n}A_{ik}B_{kj}=iB_{ij}$$

ו-

$$(BA)_{ij}=\sum_{k=1}^{n}B_{ik}A_{kj}=jB_{ij}$$

כלומר

$$\begin{gathered}\forall i\neq j:\ iB_{ij}=jB_{ij}\\\Downarrow\\\forall i\neq j:\ (i-j)\,B_{ij}=0\\\Downarrow\\\forall i\neq j:\ B_{ij}=0\end{gathered}$$

($\Rightarrow$) נתון ש-B אלכסונית צריך להוכיח ש-$AB=BA$

$$(AB)_{ij}=\begin{cases}A_{ii}B_{ii} & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}=\begin{cases}B_{ii}A_{ii} & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}=(BA)_{ji}$$

למעשה אם A,B אלכסונית אז $AB=BA$.

תרגיל 3. הוכח\הפרך

1. אם $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ הפיכה אז למערכות $ABx=0$ ו-$Bx=0$ יש אותם פתרונות.
2. אם $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ הפיכה אז למערכות $ABx=0$ ו-$BAx=0$ יש אותם פתרונות.
3. מתקיים $\forall A,B\in\mathbb{R}^{n\times n}:\ \operatorname{tr}(AB)=\operatorname{tr}(A)\operatorname{tr}(B)$.

פתרון.

1. נכון, נראה החלה דו כיוונית.

נתון ש-x מקיים $Bx=0$ נראה שהוא מקיים גם $ABx=0$

$$ABx=A\,(Bx)=A\cdot 0=0$$

כעת נתון ש-x מקיים $ABx=0$ נראה שהוא גם מקיים $Bx=0$

$$Bx=A^{-1}ABx=A^{-1}\,(ABx)=A^{-1}\cdot 0=0$$

2. לא נכון, אם ניקח

$$A=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$$

אז

$$\begin{gathered} ABx=0 \\ \Downarrow \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Downarrow \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Downarrow \\ x_2=0 \end{gathered}$$

כלומר קבוצת הפתרונות של המערכת $ABx=0$ היא

$$\left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\middle| x_2=0\right\}=\left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix}\middle| x_1\in\mathbb{R}\right\}$$

בעוד ש-

$$\begin{gathered} BAx=0 \\ \Downarrow \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Downarrow \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Downarrow \\ x_1=0 \end{gathered}$$

כלומר קבוצת הפתרונות של המערכת $BAx=0$ היא

$$\left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\middle| x_1=0\right\}=\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \end{pmatrix}\middle| x_2\in\mathbb{R}\right\}$$

3. לא נכון, ניקח

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

אז

$$A^2=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

בעוד ש-$A\neq 0$

4. לא נכון, ניקח

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

אז

$$\operatorname{tr}(AB)=\operatorname{tr}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)=0$$

בעוד ש-

$$\operatorname{tr}(A)\operatorname{tr}(B)=\operatorname{tr}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)\operatorname{tr}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)=1\cdot 1=1$$