בס"ד

חשבון אינפי 2

תרגיל 1-פתרון

1. חשבו את הגבולות הבאים (היעזרו בכלל לופיטל) :

א. $\lim_{x\to 1}(2-x)^{\tan\frac{\pi}{2}x}$

פתרון:

$$\lim_{x\to 1}(2-x)^{\tan\frac{\pi}{2}x} \overset{1^\infty}{=} \ldots$$

$$y=(2-x)^{\tan\frac{\pi}{2}x}$$

$$\ln y=\tan\left(\frac{\pi}{2}x\right)\ln(2-x)$$

$$\lim_{x\to 1}\ln y=\lim_{x\to 1}\tan\left(\frac{\pi}{2}x\right)\ln(2-x)\overset{\infty\cdot 0}{=}\lim_{x\to 1}\frac{\ln(2-x)}{\cot\left(\frac{\pi}{2}x\right)}$$

$$\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 1}\frac{\frac{-1}{(2-x)}}{\frac{1}{-\sin^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)}\cdot\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{\pi}\lim_{x\to 1}\frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{2-x}=\frac{2}{\pi}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1}(2-x)^{\tan\frac{\pi}{2}x}=e^{2/\pi}$$

ב. $\lim_{x\to\infty}(1+x^2)^{1/\ln x}$

פתרון:

$$\lim_{x\to\infty}(1+x^2)^{1/\ln x}\overset{\infty^0}{=}\ldots$$

$$y=(1+x^2)^{1/\ln x}$$

$$\ln y=\frac{1}{\ln x}\ln(1+x^2)$$

$$\lim_{x\to\infty}\ln y=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(1+x^2)}{\ln x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x}{(1+x^2)}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2}{(1+x^2)}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\left(\underbrace{\frac{1}{x^2}}_{\to 0}+1\right)}=2$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty}(1+x^2)^{1/\ln x}=e^2$$

ג. $\lim_{x\to\infty}\left(x-\ln\left(1+2e^{x}\right)\right)$

פתרון:

$$\lim_{x\to\infty}\left(x-\ln\left(1+2e^{x}\right)\right)\overset{\infty-\infty}{=}\ldots$$

$$y=e^{\left(x-\ln\left(1+2e^{x}\right)\right)}=\frac{e^{x}}{1+2e^{x}}$$

$$\lim_{x\to\infty}y=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{x}}{1+2e^{x}}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{e^{x}}{2e^{x}}=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to\infty}\left(x-\ln\left(1+2e^{x}\right)\right)\overset{\infty-\infty}{=}\ln\frac{1}{2}=-\ln 2$$

ד. $\lim_{x\to 1}\frac{\sin(\pi x)\ln x}{1+\cos(\pi x)}$

פתרון:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sin(\pi x)\ln x}{1+\cos(\pi x)}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 1}\frac{\pi\cos(\pi x)\ln x+\frac{\sin(\pi x)}{x}}{-\pi\sin(\pi x)}=\lim_{x\to 1}\frac{\cos(\pi x)\ln x}{-\sin(\pi x)}-\frac{1}{\pi x}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{-\pi\sin(\pi x)\ln x+\frac{\cos(\pi x)}{x}}{-\pi\cos(\pi x)}-\frac{1}{\pi x}=-\frac{1}{2\pi}$$

ה. $\lim_{x\to\infty}\frac{x^{\ln x}}{(\ln x)^{x}}$

פתרון:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^{\ln x}}{(\ln x)^{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{\ln x\ln x}}{e^{x\ln(\ln x)}}=\lim_{x\to\infty}e^{\ln^{2}x-x\ln(\ln x)}=\lim_{x\to\infty}e^{\ln^{2}x\left(1-\frac{x\ln(\ln x)}{\ln^{2}x}\right)}$$

נחשב את הגבול

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x\ln(\ln x)}{\ln^{2}x}\right)$$

ע"י שימוש בכלל לופיטל

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x\ln(\ln x)}{\ln^{2}x}\right)\geq\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\ln^{2}x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2\ln x\cdot\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{2\ln x}$$

נשתמש בלופיטל פעם נוספת

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{2\ln x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\frac{2}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{2}=\infty$$

ולכן

$$\lim_{x\to\infty}\ln^2 x\left(1-\frac{x\ln(\ln x)}{\ln^2 x}\right)\overset{\infty\cdot(1-\infty)}{=}-\infty$$

ולכן

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^{\ln x}}{(\ln x)^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{\ln x\ln x}}{e^{x\ln(\ln x)}}=\lim_{x\to\infty}e^{\ln^2 x-x\ln(\ln x)}=\lim_{x\to\infty}e^{\ln^2 x\left(1-\frac{x\ln(\ln x)}{\ln^2 x}\right)}\overset{e^{-\infty}}{=}0$$

ו. $\lim_{x\to0}\frac{x\tan x}{\sqrt{1-x^2}-1}$

פתרון:

$$\lim_{x\to0}\frac{x\tan x}{\sqrt{1-x^2}-1}=\lim_{x\to0}\frac{\tan x+\frac{x}{\cos^2 x}}{\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}}=\lim_{x\to0}\sqrt{1-x^2}\left(-\frac{\tan x}{x}-\frac{1}{\cos^2 x}\right)=1\cdot(-1-1)=-2$$

$\lim_{x\to\infty}\frac{x^k}{e^x}, k\in\mathbb{N}$ .a

פתרון:
נוכיח באינדוקציה שהגבול הנ"ל הינו אפס. טריוויאלי עבור $k=0$. נניח נכון עבור $k-1$ ונוכיח עבור k :

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^k}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(x^k\right)'}{\left(e^x\right)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{kx^{k-1}}{e^x}=k\lim_{x\to\infty}\frac{x^{k-1}}{e^x}=0$$

$\lim_{x\to\infty}\left(e^{3x}-5x\right)^{\frac{1}{x}}$ .b

פתרון:
$\lim_{x\to\infty}\left(e^{3x}-5x\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}e^{\ln\left(\left(e^{3x}-5x\right)^{\frac{1}{x}}\right)}=e^{\lim_{x\to\infty}\ln\left(\left(e^{3x}-5x\right)^{\frac{1}{x}}\right)}$. כעת

$\lim_{x\to\infty}\ln\left(\left(e^{3x}-5x\right)^{\frac{1}{x}}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\ln\left(e^{3x}-5x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(e^{3x}-5x\right)}{x}=$. כעת המונה

והמכנה שואפים לאינסוף ולכן ניתן ולהפעיל לופיטל, וזה שווה:

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(e^{3x}-5x\right)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3e^{3x}-5}{e^{3x}-5x}}{1}=\lim_{x\to\infty}\frac{9e^{3x}}{3e^{3x}-5}=3$$

ולכן הגבול כולו שווה ל e^3

$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos\left(x^2\right)}{x^2\sin\left(x^2\right)}$ .c

פתרון:
המכנה והמונה שואפים לאפס, לכן נפעיל לופיטל

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos\left(x^2\right)}{x^2\sin\left(x^2\right)}=\lim_{x\to0}\frac{2x\sin(x^2)}{2x\sin(x^2)+x^2 2x\cos(x^2)}=\lim_{x\to0}\frac{\sin(x^2)}{\sin(x^2)+x^2\cos(x^2)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x\cos(x^2)}{2x\cos(x^2)+2x\cos(x^2)-x^2 2x\sin(x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x^2)}{\cos(x^2)+\cos(x^2)-x^2\sin(x^2)}=\frac{1}{2}$$

.d $\lim_{x\to\infty}\sqrt[x]{x}$

פתרון:

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt[x]{x}=\lim_{x\to\infty}x^{\frac{1}{x}}=e^{\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}}=e^{\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}}=e^0=1$$