קורס: אלגברה ליניארית 1
מרצה: פרופסור רזניקוב
מתרגלים: מני ולואי

פתרון תרגיל בית מספר 4

תרגיל 1.2

א. למערכת $\begin{cases} x+y=5 \\ x+y=7 \end{cases}$ אין פתרון.

ב. למשוואה $x+5=x+7$ אין פתרון.

ג. למערכת הומוגנית תמיד יהיה פתרון טריוויאלי (שכולו אפסים). כך למשל בשתי משוואות בשני נעלמים תמיד יהיה קיים הפתרון $(x,y)=(0,0)$.

תרגיל 1.5 א

נראה רק שקיים פתרון יחיד:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & i & 1+i & 2 \\ -i & 1 & 0 & 2 \\ 1-i & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3+(i-1)R_1\to R_1]{R_2+iR_1\to R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & i & 1+i & 2 \\ 0 & 0 & i-1 & 2+2i \\ 0 & -1-i & -1 & 2i \end{array}\right) \xrightarrow{R_2\leftrightarrow R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & i & 1+i & 2 \\ 0 & -1-i & -1 & 2i \\ 0 & 0 & i-1 & 2+2i \end{array}\right)$$

הגענו למצב של פתרון יחיד. ניתן למצוא מהו z ואח"כ את y,x.

תרגיל 3.6

ב.

אם $A=(a_{ij})\in F^{m\times n}$ אז

$$(x_1, \cdots, x_m)A=(x_1, \cdots, x_m)\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ a_{m-11} & \cdots & \cdots & a_{m-1n} \\ a_{m1} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}=$$

$$(x_1a_{11}+x_2a_{21}+\cdots+x_ma_{m1}, x_1a_{12}+x_2a_{22}+\cdots+x_ma_{m2}, \cdots, x_1a_{1n}+x_2a_{2n}+\cdots+x_ma_{mn})=$$

$$x_1(a_{11},a_{12},\cdots,a_{1n})+x_2(a_{21},a_{22},\cdots,a_{2n})+\cdots x_m(a_{m1},a_{m2},\cdots,a_{mn})=\sum_{i=1}^{m}x_iR_i(A)$$

מכיון ש-

$e_i=(x_1, \cdots, x_m)$ באשר לכל $j\neq i$ $x_j=0$ ו- $x_i=1$ נקבל

$$e_iA=\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{m}x_jR_j(A)+x_iR_i(A)=\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{m}0R_j(A)+1\cdot R_i(A)=R_i(A)$$

ג. יש להוכיח כי $R_i(C)=R_i(A)B$. נפתח את אגף ימין ונגיע לאגף שמאל.

$$R_i(A)B=(a_{i1}\ \ a_{i2}\ \dots a_{in})B=\sum_{t=1}^{n}a_{it}R_t(B)=\sum_{t=1}^{n}a_{it}(b_{t1}\ \ b_{t2}\ \dots b_{tk})=\sum_{t=1}^{n}(a_{it}b_{t1}\ \ a_{it}b_{t2}\ \dots a_{it}b_{tk})=$$
$$\left(\sum_{t=1}^{n}a_{it}b_{t1},\sum_{t=1}^{n}a_{it}b_{t2}\dots\sum_{t=1}^{n}a_{it}b_{tk}\right)=(c_{i1}\ \ c_{i2}\ \dots c_{ik})=R_i(C)$$

פתרון התרגיל הנוסף

תהליך לדירוג קנוני של מטריצה על ידי פעולות שורה אלמנטריות

נתונה מטריצה $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{11} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn}\end{pmatrix}$.

מטרת העל:

לכל עמודה: לאפס את כל האיברים בעמודה חוץ מאיבר ציר, או לאפס אותה לחלוטין ואז לעבור לעמודה הבאה.

האלגוריתם:

עמודה ראשונה:

נחפש איבר ציר בשורה הראשונה

נניח קיימת שורה i כך ש a_{i1} שונה מאפס*

-נחליף את השורה הראשונה עם השורה ה- i ונקבל: $\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i1} & \dots & a_{in}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn}\end{pmatrix}$.

-נחלק את השורה הראשונה ב- a_{i1} ונקבל מטריצה עם 1 במקום ה- $(\ )_{11}$.

-נחסר מכל שורה j את השורה הראשונה כפול a_{j1} (שימו לב שבשורה ה- i נחסר את a_{11} במקום) $R_j=R_j-a_{j1}R_1$.

נקבל עמודה ראשונה שנראית כך: $\begin{pmatrix}1\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix}$.

*אם לא הייתה קיימת שורה i כזו, אזי העמודה הראשונה הייתה כולה אפסים, ואז היינו עושים את אותו תהליך על העמודה השנייה ישירות (נחפש בה איבר ציר בשורה הראשונה).
שימו לב שהעמודה הראשונה נשארת עמודת אפסים לאורך כל התהליך.

עכשיו נעבור לעמודה הבאה:
[נחפש איבר ציר בשורה השנייה]
נחזור ונקרא לכל איברי המטריצה במצבה הנוכחי a_{ij} (על מנת להקל על הסימון).
נמצא שורה i מבין השורות 2 עד m כך שהאיבר a_{i2} יהיה שונה מאפס ונחליף את השורה i עם השורה 2.
שימו לב שהעמודה השמאלית נשארת אותו דבר.
אם אין איבר כזה נעבור לעמודה הבאה ונבצע את התהליך הזה.
-נחלק את השורה 2 באיבר במקום ה- $(\ )_{22}$, על מנת להפוך אותו לאחד.
-נאפס את שאר העמודה השנייה באופן הבא:
נחסר מכל שאר השורות במטריצה (מעל ומתחת לשנייה) את השורה השנייה כפול הקבוע המתאים
(האיבר בעמודה השנייה של השורה)
שימו לב: התהליך לא פגע בעמודה הראשונה כלל. תחשבו למה.

נמשיך כך בתהליך עד שנסיים את כל עמודות המטריצה ונקבל דירוג קנוני. (נעבור לעמודה הבאה, נמצא איבר שונה מאפס, נשים אותו במקום הנכון, נהפוך אותו לאחד ונאפס את כולה).

שימו לב שלאורך התהליך, השורה שבה אנו מחפשים את איבר הציר הבא היא השורה הבאה אחרי איבר הציר הקודם.
למשל, אם העמודה הראשונה הייתה כולה אפסים בעמודה השנייה עדיין נחפש איבר ציר בשורה הראשונה.
אם בעמודה ה- j יהיו אפסים בשורה שבה אנו מחפשים את איבר הציר ומתחת לה, אזי נחפש שוב באותה שורה בעמודה $j+1$.

שימו לב 2:
בעמודה בה לא נמצא איבר ציר אנו לא משנים כלום. לכן יכולים להיות בה כל מיני איברים (אולי שונים מאפס ואחד). זוהי העמודה של המשתנים החופשיים.
העמודות בהן יש איברי ציר הן העמודות של המשתנים התלויים.

<u>פתרון סעיף ב'</u>

נניח בשלילה שישנן 2 צורות מדורגות למטריצה נתונה עם עמודות ציר שונות. נמשיך לדרג כל אחת מהן עד לצורה הקנונית ומכיון שעמודות הציר נשמרות במעבר מהצורה המדורגת לצורה מדורגת קנונית (מדוע?) נקבל 2 צורות מדורגות קנונית עם עמודות ציר שונות. כלומר, נקבל שלמטריצה הנתונה 2 צורות קנוניות שונות בסתירה לכך שלכל מטריצה צורה מדורגת קנונית יחידה.