פיתרון לתרגיל מספר 5

תשובה 1:

מספר המכונות X_k שמייצרות בדיוק $k = 1, \ldots, 10$ סוכריות, מתפלג פואסונית עם פרמטר $\lambda = 2$. המשתנים בלתי תלויים. ואין מכונות שמייצרות יותר מ- 10 סוכריות.

סכום מספר המכונות המייצרות לכל היותר n סוכריות, מתפלג פואסונית אם פרמטר λn עבור $n \leq 10$. עבור $n > 10$, נספרות רק המכונות המיצרות לכל היותר 10 סוכריות, והללו מתפלגות פואסונית עם פרמטר 10λ.

בתהליך פואסוני אין תלות בין מספר המופעים בתחומים זרים (שאינם נחתכים) . נסמן ב – S_7' את מספר המכונות המיצרות יותר מ- 2 סוכריות ולכל היותר 9 סוכריות , סה"כ 7 ערכים. לכן מספר המכונות מתפלג פואסונית עם פרמטר $7\lambda = 14$. עבור כל $k > 2$ ההסתברות היא

$$P(S_9 = k \mid S_2 = 2) = \frac{P(S_9 = k, S_2 = 2)}{P(S_2 = 2)} =$$

$$- \frac{P(S_2 = 2)P(S'_7 = k-2)}{P(S_2 = 2)} - P(S'_7 - k - 2) - \frac{e^{-14}(14)^{k-2}}{(k-2)!}$$

תשובה 2:

לפי נוסחת ההסתברות השלמה $P(Y=k) = \sum_n B(n, 0.5) \cdot P(X=n)$

עתה, $\binom{n}{k} 0.5^n = \binom{n}{k} 0.5^k (1-0.5)^{n-k} = B(n, 0.5)$ ו- $P(X=n) = (1-p)^{n-1} p$

לכן נקבל ש $P(Y=k) = \sum_{n=1}^{\infty} \binom{n}{k} 0.5^n \cdot (1-p)^{n-1} p$

תשובה 3:

$X \sim HG(5;20,10)$ זאת אומרת שעבור $0 \leq x \leq 5$ מתקיים: $P(X=x) = \frac{\binom{20}{x}\binom{10}{5-x}}{\binom{30}{5}}$.

תשובה 5:

א.

$$.E[X!]=\sum_x x!\,P_X(x)=\sum_{k=0}^{\infty}k!\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k=\frac{e^{-\lambda}}{1-\lambda}$$

ב.

$$E[(X+1)!]=\sum_x (x+1)!\,P_X(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)!\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\lambda^k$$

$$=e^{-\lambda}\frac{\partial}{\partial\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^{k+1}=e^{-\lambda}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{\lambda}{1-\lambda}\right)=\frac{e^{-\lambda}}{(1-\lambda)^2}.$$

בשני המקרים התשובה קיימת עבור $0\le\lambda<1$ בלבד.

למי שלא יודע: ∂ הוא סימון של נגזרת.

תשובה 6:

כאשר n גדול ו- p קטן אזי ניתן לקרב את ההתפלגות הבינומית להתפלגות פואסון כאשר $\lambda=np$.

במקרה זה יש לנו 10,000 ניסויים בודדים(n), בכל אחד ההסתברות להצלחה $p=\frac{20}{10000}$ כלומר

$X\sim Bin\left(10000,\frac{20}{10000}\right)$ וכיוון שזה דיי מטורף לחשב את כל העניין פשוט נשתמש בקירוב:

$$\lambda\cong np=10000\cdot\frac{20}{10000}=20$$

נסמן בX את מספר הפורשים משירות בחודש ולכן :

$$P(X=30)=\frac{e^{-20}20^{30}}{30!}\approx 0.008$$

<u>תשובה 7:</u>

נסמן ב A את המאורע שהסוחר רוכש חבילה. לכן לפי נוסחת ההסתברות השלמה:

$$P(A|\text{4 רכיבים פגומים})\cdot 0.3+P(A|\text{רכיב פגום})\cdot 0.7=$$

$$=\frac{\binom{4}{0}\binom{6}{3}}{\binom{10}{3}}\cdot\frac{3}{10}+\frac{\binom{1}{0}\binom{9}{3}}{\binom{10}{3}}\cdot\frac{7}{10}=\frac{54}{100}$$

כלומר הסוחר אינו רוכש 46% מהחבילות שבדק.

<u>תשובה 8:</u>

א. נסמן ב-E את המאורע בו סוללה תפעל יותר מ-13 ימים. ונסמן ב-X_A את אורך החיים של סוללה שנבחרה מקרית ממפעל A. לפי הנתון $X_A\sim G(\frac{1}{20})$ ולכן,

$$P(E\mid A)=P(X_A>13)=\left(1-\frac{1}{20}\right)^{13}=0.513$$

באופן דומה נגדיר את X_B באשר $X_B\sim G\left(\frac{1}{15}\right)$ ולכן $P(E\mid B)=P(X_B>13)=\left(1-\frac{1}{15}\right)^{13}=0.408$

ואת X_C באשר $X_C\sim G\left(\frac{1}{15}\right)$ ולכן $P(E\mid C)=P(X_C>13)=\left(1-\frac{1}{12}\right)^{13}=0.323$

ולכן לפי נוסחת ההסתברות השלמה, $P(E)=0.513\cdot\frac{1}{2}+0.408\cdot\frac{1}{6}+0.323\cdot\frac{1}{3}=0.4322$

ב. לפי נוסחת בייס: $P(A\mid E)=\dfrac{P(X_A>13)\cdot P(A)}{P(E)}=\dfrac{0.513\cdot\frac{1}{2}}{0.4322}=0.594$