מבוא לטופולוגיה

תוכן תרגיל כיתה 5

(כולל חומר של הרצאה 4, לא כולל חומר של הרצאה 5)

בעיה 1

א' ניתן מ"ט (X,T): $X=\{a,b,c\}$ ו- $T=\{\emptyset,X,\{b\},\{a,b\},\{b,c\}\}$

מיצאו:

$\overline{\{a\}}$. פתרון: כל הקבוצות הסגורות כאן : $\{a\},\ \{c\},\ \{a,c\}, \emptyset, X$.

לכן ,כיוון ש- $\{a\}$ בעצמה קבוצה סגורה, $\overline{\{a\}}=\{a\}$.

$\overline{\{b\}}$. פתרון: כיוון שמכל הקבוצות הסגורות רק X מכילה את $\{b\}$,

אז $\overline{\{b\}}=X$.

$\{a\}^\circ$. פתרון: כיוון שמכל הקבוצות הפתוחות רק $\emptyset$ מוכלת ב- $\{a\}$,

אז $\{a\}^\circ=\emptyset$

$\{b\}^\circ$ פתרון: כיוון ש- $\{b\}$ בעצמה קבוצה פתוחה, $\{b\}^\circ=\{b\}$

ב' ניתן מ"ט (X,T): $X=[0,\infty)\subseteq\mathbb{R}$ ו- $T=\{\emptyset,X,(a,\infty)|a\in\mathbb{R},a\geq 0\}$

תהי $A\subseteq X$ קבוצה חסומה. מצאו: $\bar{A}$ ו- A°.

פתרון:

$\bar{A}$). הקבוצות הסגורות כאן הן: $\emptyset,X$ והקטעים $[0,a]$ כאשר $a\geq 0$.

כיוון ש-A חסומה, כל נקודה x מ- A מקחחמת $0\leq x\leq \sup A$.

לכן $A\subseteq[0,\sup A]$. הקטע $[0,\sup A]$ הוא קבוצה סגורה (כמו שבירררנו).

אם ישנו קטע אחר $[0,b]$ כך שמתקיים $A\subseteq[0,b]$, אזי לכל $a\in A$ מתקיים $a\leq b$, ולכן $\sup A\leq b$ ואז $[0,\sup A]\subseteq[0,b]$. קיבלנו ש- $[0,\sup A]$ קבוצה סגורה המינימלית ביותר המכילה את A , *ז"א:* $\bar{A}=[0,\sup A]$ מש"ל.

A°) כך הקבוצות הפתוחות הלא ריקות במרחב הזה – הן קרנות לא חסומות. לכן הן לא מוכלות ב-A. אזי הקבוצה הפתוחה היחידה שמוכלת ב-A היא ריקה. מזה נובע – לפי הגדרת הפנים – ש- $A^\circ=\emptyset$.

בעיה 2

א' $\overline{\emptyset} = \emptyset$

ב'

$$\bigcup_{\alpha\in I}\overline{A_\alpha} = \overline{\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha}$$

הוכחה

$$p \in \bigcup_{\alpha\in I}\overline{A_\alpha}$$

$$\Updownarrow$$

קיים $\beta \in I$ כך ש- $p \in \overline{A_\beta}$

$$\Updownarrow$$

קיים $\beta \in I$ כך שכל סביבה של p חותכת את A_β

$$\Updownarrow$$

כל סביבה של p חותכת את $\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha$

$$\Updownarrow$$

$$p \in \overline{\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha}$$

ג'

$$\overline{\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha} \subseteq \bigcap_{\alpha\in I} \overline{A_\alpha}$$

הוכחה

לכל $\alpha \in I$ מתקיים: $A_\alpha \subseteq \overline{A_\alpha}$. לכן

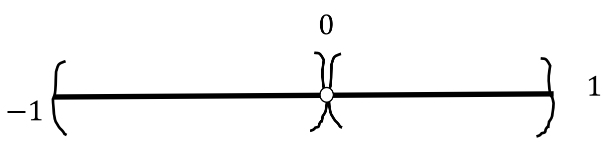
$$\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha \subseteq \bigcap_{\alpha\in I} \overline{A_\alpha}$$

כל $\overline{A_\alpha}$ סגורה. ואז $\bigcap_{\alpha\in I} \overline{A_\alpha}$ סגורה כחיתוך סגורות.

אזי $\overline{\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha} \subseteq \bigcap_{\alpha\in I} \overline{A_\alpha}$, מש"ל.

ד' (דוגמה לאי שוויון)

$$(-1,0) \cap (0,1) = \emptyset \subset \{0\} = [-1,0] \cap [0,1] = \overline{(-1,0)} \cap \overline{(0,1)}$$



בעיה 3

א' מיצאו ב- $\mathbb{R}$: $\overline{\mathbb{Q}}$, $\overline{\mathbb{Q}^c}$

פתרון: תהי $x \in \mathbb{R}$ כל סביבה של x מכילה את הכדור $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$. בקטע הזה קיימים מספרים רציונליים ולא רציונליים (מקורסים קודמים). לכן כל סביבה של x חותכת גם $\mathbb{Q}$ וגם $\mathbb{Q}^c$. אזי $x \in \overline{\mathbb{Q}}$ ו- $x \in \overline{\mathbb{Q}^c}$. x היתה נקודה כלשהי מ-$\mathbb{R}$. לכן $\mathbb{R} = \overline{\mathbb{Q}^c} = \overline{\mathbb{Q}}$.

ב' יהיו (M,d) מ"מ, $p \in M, r > 0$.

הוכיחו ש- $\overline{B(p,r)} \subseteq \{x \in M | d(x,p) \leq s\}$

כאשר $s = \sup\{d(y,p) | y \in B(p,r)\}$.

פתרון:

נסמן: $F \coloneqq \{x \in M | d(x,p) \leq s\}$.

תהי x_n סדרה ב-F כך ש- $x_n \to x_0$. אזי לכל n $d(x_n,p) \leq s$ ו- $d(x_0,x_n) \to 0$. מאי-שיוון המשולש מקבלים:

$d(x_0,p) \leq d(x_0,x_n) + d(x_n,p) \leq d(x_0,x_n) + s$ ולפי תכונות סדרות ממשיות: $d(x_0,p) \leq s$. לכן $x_0 \in F$. אז הוכחנו ש- F סגורה.

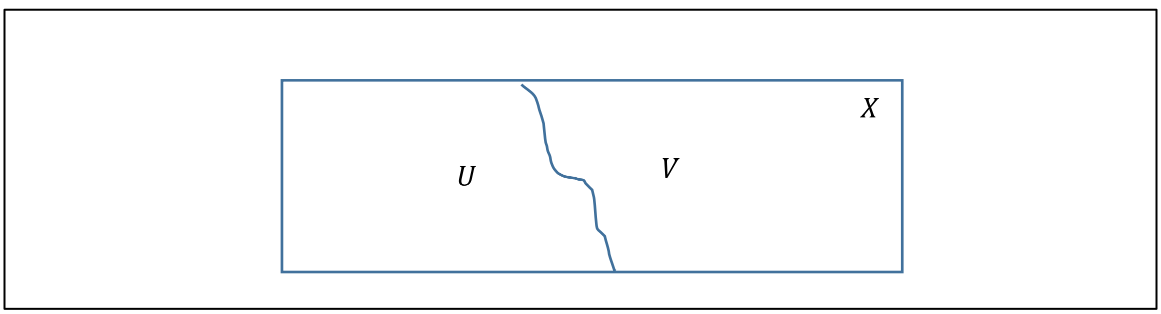
אם $y \in B(p,r)$ אזי $d(y,p) \leq s$ לפי הגדרת s. לכן $B(p,r) \subseteq F$.

כיוון ש- F סגורה, $\overline{B(p,r)} \subseteq F$, מש"ל.

קשירות

תזכורת.

הגדרה. מ"ט X קשיר אם לא קיימים בו שתי קבוצות U,V פתוחות, זרות ולא ריקות כך ש- $X = U \cup V$.



בעיה 5.

הוכחו ששני המרחבים מבעיה 1 קשירים.

א' ניתן מ"ט (X,T): $X = \{a,b,c\}$ ו- $T = \{\emptyset, X, \{b\}, \{a,b\}, \{b,c\}\}$

ב' ניתן מ"ט (X,T): $X = [0,\infty) \subseteq \mathbb{R}$ ו- $T = \{\emptyset, X, (a,\infty) | a \in \mathbb{R}, a \geq 0\}$

הוכחה

א' כל שתי קבוצות פתוחות ולא ריקות - נחתכות. (אפשר לבדוק חשירות)

ב' כל שתי קבוצות פתוחות ולא ריקות - נחתכות.

$$([a_1,\infty)\cap[a_2,\infty)=[\max\{a_1,a_2\},\infty)\neq\emptyset)$$

דיוקים

1) מ"ט קשיר אינו ריק. (הגדרה)
2) הגדרה. תת קבוצה A במ"ט קשירה אם"ם A קשיר כתת מרחב.
3) תענה (בעיה 6).
תת קבוצה A במ"ט X אינה קשירה (לפי ההגדרה הזאת) אם"ם
קיימות שתי קבוצות לא ריקות $U,V\subseteq X$ פתוחות ב-X
כך ש-$V\cap A\neq\emptyset$, $U\cap A\neq\emptyset$ $A\subseteq U\cup V$ ו- $U\cap V\cap A=\emptyset$

הוכחת התענה

כיוון 1.
יהי תת מרחב A אינו קשיר. אזי קיימות קבוצות לא ריקות $U',V'\subseteq A$
פתוחות ב-A כך ש-

$$U'\cup V'=A$$
$$U'\cap V'=\emptyset$$
$$U',V'\neq\emptyset$$

כיוון ש- $U',V'\subseteq A$ פתוחות ב-A , קיימות קבוצות U,V פתוחות ב-X
כך ש- $V'=V\cap A$, $U'=U\cap A$. ברור ש- U,V אינן ריקות ו-:

$$U\cap V\cap A=(U\cap A)\cap(V\cap A)=U'\cap V'=\emptyset$$
$$(U\cup V)\cap A=(U\cap A)\cup(V\cap A)=U'\cup V'=A\Rightarrow U\cup V\supseteq A$$

כיוון 2.
יהיו קיימות שתי קבוצות $U,V\subseteq X$ פתוחות ב-X
כך ש-$V\cap A\neq\emptyset$, $U\cap A\neq\emptyset$, $A\subseteq U\cup V$ ו- $U\cap V\cap A=\emptyset$.
נסמן: $\emptyset\neq V'=V\cap A$, $\emptyset\neq U'=U\cap A$.
אזי U', V' - פתוחות ב-A, לא ריקות ו-:

$$U'\cup V'=(U\cap A)\cup(V\cap A)=(U\cup V)\cap A=A$$
$$U'\cap V'=(U\cap A)\cap(V\cap A)=U\cap V\cap A=\emptyset$$

לכן תת מרחב A אינו קשיר לפי ההגדרה.

בעיה 7.

הוכיחו:

א) $\mathbb{Q}^2$ לא קשירה

הוכחה: ($U = (-\infty, \sqrt{2}) \times \mathbb{R}, V = (\sqrt{2}, \infty) \times \mathbb{R}$

$$U \cup V = \mathbb{R}^2 - (\{\sqrt{2}\} \times \mathbb{R}) \supset \mathbb{Q}^2$$

$$U \cap V = \emptyset$$

ב) ${\mathbb{Q}^c}^2$ לא קשירה

הוכחה: ($U = (-\infty, 0) \times \mathbb{R}, V = (0, \infty) \times \mathbb{R}$

$$U \cup V = \mathbb{R}^2 - (\{0\} \times \mathbb{R}) \supset {\mathbb{Q}^c}^2$$

$$U \cap V = \emptyset$$

ג) $\mathbb{Q} \times \mathbb{R}$ לא קשירה

הוכחה: ($U = (-\infty, \sqrt{2}) \times \mathbb{R}, V = (\sqrt{2}, \infty) \times \mathbb{R}$

$$U \cup V = \mathbb{R}^2 - (\{\sqrt{2}\} \times \mathbb{R}) \supset \mathbb{Q} \times \mathbb{R}$$

$$U \cap V = \emptyset$$

ד) $\mathbb{Q}^c \times \mathbb{R}$ לא קשירה

הוכחה: ($U = (-\infty, 0) \times \mathbb{R}, V = (0, \infty) \times \mathbb{R}$

$$U \cup V = \mathbb{R}^2 - (\{0\} \times \mathbb{R}) \supset \mathbb{Q}^c \times \mathbb{R}$$

$$U \cap V = \emptyset$$

בעיה 8

תמונה של עקום

תהי $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ פונקציה רציפה. נסמן ב- Γ_f תת קבוצה ($\Gamma_f \subseteq \mathbb{R}^2$)
מוגדרת באופן הבא: $\Gamma_f = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 | x \in \mathbb{R}\}$. (גרף של פונקציה)

הוכיחו שתת מרחב Γ_f קשיר.

<u>הוכחה.</u>
נגדיר העתקה $\varphi: \mathbb{R} \to \Gamma_f$ כך ש- $\varphi: x \mapsto (x, f(x))$.
נתבונן ב-$\mathbb{R}$ במטריקה רגילה (אוקלידית), וב-Γ_f במטריקה המושרה ממטריקה d_{max} ב-$\mathbb{R}^2$ (שכידוע לנו שקולה לאוקלידית). ונוכיח שאז הפונקציה φ רציפה. נשתמש להוכחה את קריטריון השדרות לרציפות הפונקציה וקריטריון התכנסות השדרות:
תהי x_n שדרה ממשית, $x \in \mathbb{R}$ ו- $x_n \to x$. אזי:

$$x_n \to x$$
$$\Downarrow$$
$$f(x_n) \to f(x)$$
$$\Downarrow$$
$$d(x_n, x) \to 0, d(f(x_n), f(x)) \to 0$$
$$\Downarrow$$
$$|x_n - x| \to 0, |f(x_n) - f(x)| \to 0$$
$$\Downarrow$$
$$\max\{|x_n - x|, |f(x_n) - f(x)|\} \to 0$$
$$\Downarrow$$
$$d_{max}\ \left((x_n, f(x_n)), (x, f(x))\right) \to 0$$
$$\Downarrow$$
$$(x_n, f(x_n)) \to (x, f(x))$$
$$\Downarrow$$
$$\varphi(x_n) \to \varphi(x)$$

אז φ רציפה.
$\mathbb{R}$ מ"ט קשיר (מההרצאה), לכן $\varphi(\mathbb{R}) = \Gamma_f$ גם קשיר (מההרצאה), מש"ל .