

תרגול 4 – חדון"א 1 לביולוגיה חישובית

המספר e

שימוש בגבול $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ (ראיתם בהרצאה)

דוגמא

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n-2}\right)^{3n+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-2}{n-2} + \frac{3}{n-2}\right)^{3n+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{(n-2)}{3}}\right)^{3n+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{\frac{(n-2)}{3}}\right)^{\frac{n-2}{3}}\right)^{3 \frac{(3n+2)}{n-2}} = e^9$$

הערה

לעיתים ניתן להראות שהגבול קיים גם אם לא ניתן למצוא את הגבול עצמו.

משפט

כל סדרה מונוטונית וחסומה מתכנסת.

דוגמא

נוכיח שהסדרה $a_n = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$ מתכנסת.

הסדרה מונוטונית עולה מכיוון שכל איבר מתקבל ע"י הוספת מספר חיובי לאיבר הקודם לו. נשאר להוכיח שהסדרה חסומה.

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n-1) \cdot n} \leq 1 - \frac{1}{n} < 1$$

ולכן מתכנסת.

כלל הסנדביץ

יהיו $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ ו $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ שלוש סדרות. אם $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = L$ ואם קיים n_0 כך שלכל

$$a_n \leq b_n \leq c_n, n \geq n_0$$

מתכנסת לגבול L .

תרגיל

חשב את הגבול $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$

פתרון

נשים לב ש

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} = \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$$

ולכן $\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$ נסמן

$$a_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+n}}, b_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}, c_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$$

מכיוון שלכל n טבעי מתקיים $a_n \leq b_n \leq c_n$ ומכיוון ש $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 1$ נקבל שגבול הסדרה הוא 1.

קריטריון קושי להתכנסות סדרות

סדרת מספרים ממשיים $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת אם ורק אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים מספר טבעי n_0 כך שלכל $n \geq n_0$

$$\text{ולכל } p \in \mathbb{N} \text{ מתקיים } |a_{n+p} - a_n| < \varepsilon.$$

הערה

שימו לב לחשיבות המילה לכל.

אם במקום המילה "לכל" שהדגשתי הייתה רשומה המילה "קיים" הקריטריון לא הייה נכון.

ראיתם בהרצאה שהסדרה $a_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$ מתבדרת.

אבל כן מתקיים

$$\text{לכל } \varepsilon > 0 \text{ קיים מספר טבעי } n_0 \text{ כך שלכל } n \geq n_0 \text{ מתקיים } |a_{n+1} - a_n| < \varepsilon.$$

מדוע?

מכיוון שהטענה נכונה עבור $p=1$ ולא לכל $p \in \mathbb{N}$.

תרגיל

הוכח כי הסדרה $\sum_{i=1}^n \frac{1}{4^i + i}$ מתכנסת.

$$|S_{n+p} - S_n| = \left| \frac{1}{4^{n+1} + n+1} + \frac{1}{4^{n+2} + n+2} + \frac{1}{4^{n+3} + n+3} + \dots + \frac{1}{4^{n+p} + n+p} \right|$$

$$\leq \frac{1}{4^{n+1}} + \frac{1}{4^{n+2}} + \frac{1}{4^{n+3}} + \dots + \frac{1}{4^{n+p}} = \frac{1}{4^{n+1}} \cdot \left(1 - \frac{1}{4^p}\right) \cdot \frac{4}{3} = \frac{1}{3 \cdot 4^n} \cdot \left(1 - \frac{1}{4^p}\right) \leq \frac{1}{4^n}$$

$$\text{ועבור } n_0 = \lceil -\log_4 \varepsilon \rceil$$

$$\frac{1}{4^n} \leq \frac{1}{4^{n_0}} = \frac{1}{4^{\lceil -\log_4 \varepsilon \rceil}} \leq \varepsilon$$

הערה

ראיתם בהרצאה שהסדרה $a_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$ מתבדרת - ראיתם ש $a_{2n} - a_n > \frac{1}{2}$.

תתי סדרות

לפני שנרשום את ההגדרה הפורמלית לתת סדרה ניתן מספר דוגמאות כדי להסביר את הרעיון של ההגדרה והשימושים שלה.

דוגמאות

1. נתונה הסדרה ההנדסית $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$ ניקח למשל את כל איברי הסדרה שנמצאים

במקומות הזוגיים, $\frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \dots$ ונסמנם $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$. הסדרה הנ"ל היא תת סדרה של הסדרה הנתונה

כאשר האיבר הראשון בסדרה החדשה הוא האיבר השני בסדרה הנתונה נסמן: $n_1 = 2$ ו"א $a_{n_1} = b_1$.

באופן כללי נאמר שלכל k טבעי $a_{n_k} = b_k$.

2. נתונה הסדרה $1, 1, -1, 1, 1, -1, 1, 1, -1, \dots$ (בנייה שהחוקיות נשמרת) נתבונן בשתי תתי סדרות – סדרה אחת היא הסדרה הקבועה 1, סדרה שנייה היא הסדרה הקבועה -1. קיבלנו שתי תתי סדרות המתכנסות לגבולים שונים במקרה כזה נוכל לאמר שהסדרה לא מתכנסת. נשים לב שהאיבר השלישי בסדרה הקבועה 1 הוא האיבר הרביעי בסדרה המקורית ולכן $n_3 = 4$.

הגדרה

תהיי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה נתונה, ותהיי $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ סדרה מונוטונית עולה ממש של מספרים טבעיים. אם לכל $k \in \mathbb{N}$ נגדיר $b_k = a_{n_k}$, אז נקבל סדרה חדשה $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ אשר תקרא תת סדרה של הסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, בד"כ נסמן $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$.

דוגמא

אם $a_n = \frac{1}{n}$ ו $b_k = \frac{1}{k^2}$ אזי $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ הינה תת סדרה של $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

משפט

אם לסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ קיימות שתי תתי סדרות המתכנסות לגבולות שונים, אזי הסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ אינה מתכנסת.

תרגיל

בדוק את ההתכנסות של הסדרה $a_n = \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)$.

פתרון

הסדרה $\{a_{2k}\}_{k=1}^{\infty}$ מתכנסת לאפס והסדרה $\{a_{4k+1}\}_{k=1}^{\infty}$ מתכנסת ל 1, ולכן הסדרה מתבדרת.

הגדרה - משפט

לכל סדרה חסומה קיים הגבול החלקי הקטן ביותר וקיים הגבול החלקי הגדול ביותר. הגבול החלקי הגדול ביותר של סדרה נתונה נקרא הגבול העליון של הסדרה, והגבול החלקי הקטן ביותר של הסדרה נקרא הגבול התחתון של הסדרה. הגבול העליון מסומן ע"י $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$ והגבול התחתון מסומן ע"י $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$.

דוגמא

נתונה הסדרה $\left\{3 + (-1)^n + \frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ הגבול העליון של הסדרה הוא 4 והתחתון הוא 2.