תרגיל 5

1. יהי (X,τ) מרחב טופולוגי. הוכיחו כי התנאים הבאים שקולים:

   (א) הטופולוגיה טריויאלית.

   (ב) לכל סדרה x_n ו $x \in X$ מתקיים $x_n \to x$ (כל סדרה מתכנסת לכל מספר)

   פתרון. נניח שהטופולוגיה טריויאילית. ניקח סדרה x_n כלשהיא ואיבר x. צריך להוכיח ש $x_n \to x$. תהי U קבוצה פתוחה כלשהיא כך ש $x \in U$. היות שהטופולוגיה טריויאלית, בהכרח $U = X$. ולכן בוודאי $\underline{x_n \in X}$ החל מ n מסוים (במקרה $n = 1$) ולכן $x_n \to X$. בכיוון השני, נניח שכל סדרה מתכנסת לכל מספר אבל הטופולוגיה לא טריויאלית. אז יש קבוצה פתוחה $U \neq \emptyset, X$ אז ניקח איזשהיא סדרה x_n שכל איבריה ב $X \backslash U$ ואיבר $x \in U$ אבל לפי הנתון $x_n \to x$ ולכן משלב מסוים $x_n \in U$ בסתירה.

2. נגדיר על $\mathbb{Z}$ את הטופולוגיה

$$\tau = \{O_n \mid n \in \mathbb{Z}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{Z}\}$$

   כאשר

$$O_n = \{n, n+1, n+2, \ldots\}$$

   בתרגיל הקודם הוכחתם שזאת אכן טופולוגיה.

   (א) מצאו סדרה שמתכנסת לכל איבר $n \in \mathbb{Z}$.

   פתרון. ניקח את הסדרה $a_n = n$. יהי $x \in \mathbb{Z}$, נוכיח ש $a_n \to x$. תהי U קבוצה פתוחה כך ש $x \in U$. אם $U = \mathbb{Z}$ אז בוודאי $a_n \in \mathbb{Z}$ החל מ $n = 1$. אם $U = O_m$ אז $a_n \in U$ החל מ $n = m$. נשים לב ש $U \neq \emptyset$ כי $x \in U$.

   (ב) האם קיימת סדרה שיש לה גבול יחיד? אם כן, תנו דוגמא. אם לא- הוכיחו.

   פתרון. קיימת, למשל $a_n = 1$ סדרה זאת קבועה ולכן מתכנסת ל 1. נוכיח שזהו הגבול היחיד שלה. נניח בשלילה כי $a_n \to a \neq 1$ אז O_a סביבה פתוחה של a. לפי הגדרת הגבול ממקום כלשהוא $a_n \in O_a$ $1 =$ אבל $1 \notin O_a$. סתירה.

3. תהי (X, τ_{cof}) קבוצה אינסופית עם הטופולוגיה הקו-סופית עליה.

   (א) תהי $X \supseteq \{x_n\}$ סדרה. הוכיחו שמתקיים אחד מהבאים:

      i. $\{x_n\}$ לא מתכנסת.

ii. ל$\{x_n\}$ יש גבול יחיד.

iii. $\{x_n\}$ מתכנסת לכל איבר בX.

פתרון. נניח כי $\{x_n\}$ מתכנסת ואין לה גבול יחיד. נניח כי $x" \neq x'$ גבולות שלה. נקבל כי לכל איבר $a \in X$ קיים מיקום n_a שהחל ממנו הסדרה שונה מ a. הוכחה: יהא $a \in X$ אזי $\{a\}^c$ הוא סביבה פתוחה של x' או "x ולכן לפי הגדרת הגבול החל ממקום מסוים כל איברי הסדרה נמצאים ב $\{a\}^c$ כלומר לא שווים ל a. כעת נוכיח כי כל $x \in X$ הוא גבול שלה. יהא $x \in X$ נתון ויהא U סביבה פתוחה של x. לפי הגדרת הטופולוגיה U^c סופי ולכן נוכל להגדיר $N = \max\{n_a | a \in U^c\}$ ולקבל כי החל ממיקום N איברי הסדרה $\{x_n\}$ שונים מכל איברי U^c ולכן בפרט ממקום זה איברי $\{x_n\}$ שייכים ל U כנדרש.

(ב) יהי Y מרחב טופולוגי מטריזבילי, ותהי $f : X \to Y$ פונקציה רציפה. הוכיחו שf קבועה.

פתרון. נבחר תת קבוצה $\{x_n\}$ מעוצמה $\aleph_0$ ש ל X. טענה: $\{x_n\}$ כסדרה מתכנסת לכל איבר ב X. הוכחה: יהא $x \in X$ ותהא U סביבה פתוחה של x. מהגדרה U^c סופית ולכן ממקום כלשהוא בסדרה , איברי הסדרה$\{x_n\}$ נמצאים ב U כנדרש. כעת אם $x_n \to x$ אזי $f(x_n) \to f(x)$ כיוון ש f רציפה. כיוון שכל $x \in X$ הוא גבול של הסדרה $\{x_n\}$ נקבל כי כל $x \in X$ מקיים כי $f(x)$ הוא גבול של הסדררה $\{f(x_n)\}$. במרחב מטריזבילי הגבול יחיד ל $\{f(x_n)\}$ גבול יחיד שנסמנו y ומכאן נקבל שכל $x \in X$ מקיים $f(x) = y$.

(ג) הוכיחו ש(X, τ_{cof}) אינו מטריזבילי. (הוכיחו שבעבור קבוצה סופית הטופולוגיה הקוסופית היא מטריזבילית)

פתרון. במקרה ש X סופית אזי הטופולוגיה הקו-סופית מתלכדת עם הטופלוגיה הדיסקטית שהיא מטרזבילית. במקרה שלנו, X אינה סופית ונוכיח כי הוא אינו מטרזבילי. נניח בשלילה כי הוא מטרזבילי אזי $Id : X \to X$ רציפה ואינה קבועה. סתירה לסעיף הקודם.

4. הוכיחו שהרכבה של פונקציות רציפות היא רציפה.

פתרון. נניח כי $f : X \to Y, g : Y \to Z$ רציפות (X, Y, Z מרחבים טופולוגיים). יהא U פתוחה ב Z ונרצה להוכיח כי $(g \circ f)^{-1}(U)$ פתוחה ב X אכן $g^{-1}(U)$ פתוחה ב Y כי g פתוחה ואז $f^{-1}(g^{-1}(U))$ פתוחה ב X כי f רציפה. כיוון ש

$$(g \circ f)^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}(U))$$

סיימנו.

5. יהי X מרחב טופולוגי ויהיו $A, B, C \subseteq X$ תתי קבוצות כך ש $C \subseteq A \cup B$. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות.

(א) אם C פתוחה ב $A \cup B$ אז $A \cap C$ פתוחה ב A ו $B \cap C$ פתוחה ב B.

פתרון. נכון. אם C פתוחה ב $A \cup B$ אז $A \cap C$ פתוחה ב A פשוט לפי הגדרה של טופולוגית תת מרחב. כנ"ל $B \cap C$ פתוחה ב B.

(ב) אם $A\cap C$ פתוחה ב A ו $B\cap C$ פתוחה ב B אז C פתוחה ב $A\cup B$.

פתרון. לא. ניקח $X=\mathbb{R}$ ו $A=C=\{0\}$ אז $A\cap C$ פתוחה ב A. ניקח $B=\mathbb{R}\backslash\{0\}$ אז $B\cap C=\emptyset$ פתוחה אבל $\{0\}$ לא פתוחה ב $A\cup B=\mathbb{R}$

6. (א) יהי X מרחב טופולוגי. ניקח תתי קבוצות $Z\subseteq Y\subseteq X$. הטופולוגיה של X משרה טופולוגיות תת מרחב על Y וזו משרה טופולוגית תת מרחב על Z. הראו שזו בדיוק טופולוגית תת המרחב ש X משרה על Z (אם הטענה הזאת הייתה לא נכונה היה מאוד קשה לדבר על תתי מרחבים).

פתרון. נכניס סימונים כאלה: τ היא הטפולוגיה של X. τ_Y ו τ_Z הן טפולוגיות התת מרחב על Y ו Z בהתאמה. כמו כן σ תהיה טופלוגיית תת המרחב ש (Y,τ_Y) משרה על Z. צריך להוכיח ש $\sigma=\tau_Z$. נוכיח הכלה דו כיוונית. נניח $A\in\sigma$ כלומר $A=Z\cap U$ כאשר $U\in\tau_Y$. לפי הגדרה $U=Y\cap V$ כאשר $V\in\tau$. לכן

$$A=Z\cap Y\cap V=Z\cap V$$

כאשר V פתוחה ב X. לפי הגדרה זה אומר ש $A\in\tau_Z$. מצד שני נניח $A\in\tau_Z$כלומר

$$A=Z\cap U$$

כאשר U פתוחה ב X. אז היות ש $Z\subseteq Y$ נקבל ש

$$A=Z\cap Y\cap U$$

ולפי הגדרה $Y\cap U\in\tau_Y$ ולכן

$$A\in\sigma$$

כנדרש. קיבלנו מה שרצינו.

(ב) הוכיחו כי טופולוגית תת מרחב של טופולוגיה קו-סופית היא בעצמה טופולוגיה קו-סופית.

פתרון. נניח X מרחב עם טופולוגיה קו סופית ו $Y\subseteq X$. צריך להוכיח שהקבוצות הסגורות ב Y הן בדיוק הקבוצות הסופיות. תהי $A\subseteq Y$ קבוצה סגורה אז

$$A=Y\cap U$$

כאשר U סגורה ב X כלומר U סופית ולכן גם A סופית. מצד שני נניח ש $A\subseteq Y$ סופית. אז

$$A=Y\cap A$$

אבל A סגורה ב X (כי היא סופית) ולכן היא גם סגורה ב Y. כנדרש.

7. תהי $f:X\to Y$ פונקציה רציפה, ויהי $A\subseteq X$. הוכיחו ש$f|_A:A\to Y$ רציפה.

פתרון. פתרון: תהא V פתוחה ב Y צ״ל כי $f|_A^{-1}(V)$ פתוחה ב A. אכן $f|_A^{-1}(V) = f^{-1}(V) \cap A$ כיוון ש f רציפה $f^{-1}(V)$ פתוחה ב X ולכן $f|_A^{-1}(V) = f^{-1}(V) \cap A$ פתוחה ב A.

8. איזה תכונות הפרדה מקיים המרחב הבא?
$(\mathbb{N}, \tau)$ כאשר $\tau = \{O_n\}_{n\in\mathbb{N}} \cup \{\mathbb{N}, \emptyset\}$ ו $O_n = \{1, ..., n\}$.
פתרון:
הוא T_0 בלבד. הוכחה:
T_0: יהיו $x_1 \neq x_2$. בה״כ $x_1 < x_2$ ואז $x_1 \in O_{x_1}$ ו $x_2 \notin O_{x_1}$.
לא T_1: יהיו $x_1 \neq x_2$. במידה ו $x_2 < x_1$ אזי כל קבוצה פתוחה שמכילה את x_1 תכיל גם את x_2 לפי הגדרת O_n. לכן לא נוכל למצוא קבוצה פתוחה U כך ש $x_1 \in O$ ו $x_2 \notin O$.

9. הוכיחו כי T_2 הוא תורשתי. כלומר, יהא (X, τ) מ״ט T_2 הוכיחו כי כל תת מרחב $Y \subseteq X$ הוא גם T_2.
פתרון:
יהא Y תת מרחב של X. יהיו $y_2 \neq y_1$ ב Y. הנקודות $y_1 .y_2$ גם ב X ולכן קיימות סביבות פתוחות (ב X) זרות V_1, V_2 כך ש $y_i \in V_i$. נקבל כי $y_i \in V_i \cap Y$ ואלו סביבות פתוחות ב Y וזרות.

10. יהא (X, τ) מ״ט בעל תכונה T_2. תהא $\tau \subseteq \tau'$ טופולוגיה נוספת על X. הוכיחו כי (X, τ') גם כן T_2.
פתרון:
יהיו $x_2 \neq x_1$ ב X אזי קיימות $V_1, V_2 \in \tau$ זרות כך ש $x_i \in V_i$. כיוון ש $\tau \subseteq \tau'$ אז $V_1, V_2 \in \tau'$ יפרידו בין x_1, x_2 .

11. בתרגיל זה נוכיח כי כל מ״מ (X, d) הוא T_4. יהא (X, d) מ״מ ויהיו S_1, S_2 קבוצות סגורות זרות.

(א) לכל $x \in S_1$ הוכיחו כי $d(x, S_2) > 0$
פתרון:
נניח בשלילה כי קיים $x \in S_1$ כך ש $d(x, S_2) = 0$ אזי קיימים $y_n \in S_2$ כך ש $d(x, y_n) \to 0$, כלומר $y_n \to x$. כיון ש S_2 סגורה אז גם $x \in S_2$ בסתירה לכך ש S_1, S_2 זרות.

(ב) לכל $x \in S_1$ נגדיר $r_x = \frac{d(x,S_2)}{2}$ ונגדיר $V_1 = \cup_{x\in S_1} B(x, r_x)$. באופן דומה, לכל $y \in S_2$ נגדיר $r_y = \frac{d(y,S_1)}{2}$ ונגדיר $V_2 = \cup_{y\in S_2} B(y, r_y)$. ברור כי V_1, V_2 פתוחות וזרות ו $S_i \subseteq V_i$. הוכיחו כי V_1, V_2 זרות וזה יסיים את ההוכחה כי (X, d) הוא T_4.
פתרון:
נניח בשלילה החיתוך $V_1 \cap V_2$ אינו ריק. אזי קיימים $x \in S_1, y \in S_2$ כך ש $z \in B(x, r_x) \cap B(y, r_y)$ אינו ריק. בה״כ $r_y \leq r_x$. נקבל כי

$$d(x, y) \leq d(x, z)+d(z, y) < r_x+r_y \leq 2r_x = d(x, S_2) = \inf\{d(x, \tilde{y}) : \tilde{y} \in S_2\}$$

סתירה.

12. נראה מרחב שהוא T_2 שאינו T_3. נתבונן ב$\mathbb{R}$ ובתת קבוצה שלו $S = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$.
נגדיר $\mathbb{CL}$ את קבוצת הקבוצות הסגורות ב $\mathbb{R}$ לפי המטריקה האוקלידית. ונגדיר $\{C =$

$A\cup T|\, A\in \mathbb{CL},\ T\subseteq S\}$ להיות הקבוצות הסגורות בטופלוגיה τ (כלומר τ מוגדרת להיות כל קבוצת כל המשלימים של קבוצות אלו). תאמינו לנו, τ יוצאת טופולוגיה.

(א) נאפיין את הקבוצות הפתוחות: הוכיחו כי $O\in\tau \iff O=B\cap R$ כאשר B פתוחה בטופולוגיה האוקלידית ו$R\supseteq S^c$.

פתרון:

$O\in\tau$ פתוחה אמ"מ $O^c=A\cup T$ סגורה אמ"מ $O=A^c\cap T^c=B\cap R$ מקיימת $B=A^c$ פתוחה בטופולוגיה האוקילידית ו $R=T^c\supseteq S^s$

(ב) הוכיחו שτ מכילה את הטופולוגיה האוקלידית, והסיקו ש $(\mathbb{R},\tau)$ הוא האוסדורף.

פתרון:

תהי O פתוחה בטופולוגיה האוקלידית. אז $O=O\cap\mathbb{R}$, ומתקיים ש O פתוחה בטופולוגיה האוקלידית, ו$\mathbb{R}\supseteq S^c$. לכן O פתוחה ב τ. הטופולוגיה האוקלידית היא T_2, ותרגיל אחר שעשיתם (ואם לא, תעשו!) שכל טופולוגיה שמכילה טופולוגיה האוסדורפית, היא האוסדורפית.

(ג) הראו שאם $O\in\tau$ כך ש $O\supseteq S$, אז O פתוחה בטופולוגיה האוקלידית.

פתרון:

לפי סעיפים קודמים, יש B פתוחה בטופולוגיה האוקלידית, ו $R\supseteq S^c$ כך ש $O=B\cap R$. נראה כי $O=B$ ע"י שנראה כי $R=\mathbb{R}$ ואז נסיים. אכן, מהנתון כי $O=B\cap R\supseteq S$ נקבל כי $R\supseteq S$ אבל כיוון שגם $R\supseteq S^c$ נקבל כי $\mathbb{R}=S\cup S^c\subseteq R$ ולכן הם שווים.

(ד) הוכיחו שלא קיימות U,V פתוחות בτ וזרות כך ש $0\in U, S\subseteq V$. הסיקו ש $(\mathbb{R},\tau)$ אינו T_3.

פתרון:

נניח בשלילה שיש קבוצות כאלו.

אם $V\in\tau$ כך ש $S\subseteq V$ אז V פתוחה בטופולוגיה האוקלידית, לפי סעיף קודם.

בנוסף, $U=B\cap R$ עבור B פתוחה בטופולוגיה האוקלידית ו$R\supseteq S^c$.

לפי ההנחה בשלילה, $U\cap V=\emptyset$. כלומר, $B\cap R\cap V=\emptyset$.

$0\in B$. וB פתוחה בטופולוגיה האוקלידית לכן קיים $B(0,\epsilon)\subseteq B$ ואז $\emptyset\neq B(0,\epsilon)\cap S\subseteq B\cap S$. כלומר החיתוך $B\cap S$ אינו ריק ולכן גם $B\cap S\subseteq B\cap V$.

.

כלומר, $B\cap V\neq\emptyset$. מכיוון ששתיהן פתוחות בטופולוגיה האוקלידית, $B\cap V$ פתוחה באוקלידית ולכן היא לא בת מנייה, כלומר $|B\cap V|>\aleph_0$ (להזכירכם כל קבוצה פתוחה ב$\mathbb{R}$ היא לא בת מניה כי היא מכילה קטע פתוח).

כעת, $S\supseteq R^c$. כלומר, המשלים של R הוא בן מנייה. לכן $B\cap V\nsubseteq R^c$. זה אומר ש $[B\cap V]\cap R\neq\emptyset$. סתירה.

נשים לב כי $S=\emptyset\cup S$ סגורה בτ, ו$0\notin S$. אבל ראינו שלא ניתן להפריד בין 0 לS. מסקנה: $(\mathbb{R},\tau)$ הוא לא T_3.