הגדרה: נניח שיש לנו מספר אינסופי של מרחבים טופולוגיים. (X_i,τ_i).
יש את קבוצת המכפלה $\prod X_i$ שהאיברים בה הם מן וקטורים אינסופיים (x_i) כאשר לכל i, $x_i \in X_i$.
ההגדרה הפורמלית היא אוסף הפונקציות $f : I \to \bigcup X_i$ כאשר לכל i, $f(i) \in X_i$. מקובל לסמן את $f(i)$ בx_i.
נרצה להגדיר טופולוגיה על הקבוצה. מה נרצה שיתקיים?
אנחנו רוצים שפונקציות ההטלה בכל רכיב יהיו רציפות.
מה זה פונקציית ההטלה? לכל אינדקס i, יש את ההטלה על הרכיב הi,

$$\pi_i(f) = f(i)$$

$$\pi_i((x_j)) = x_i$$

אנחנו רוצים שכל פונקציות ההטלה יהיו רציפות.
נתמקד ברכיב מסויים, נניח ברכיב הj. בשביל שפונקציית ההטלה על הרכיב הj תהיה רציפה צריך להתקיים שלכל קבוצה פתוחה O בX_j

$$\pi_j^{-1}(O) = O \times \prod_{i\neq j} X_i$$

צריך להיות פתוח.
כלומר, קיבלנו שכל הקבוצות מהצורה: ברכיב מסויים יש קבוצה פתוחה ובכל השאר כל המרחב, חייבות להיות פתוחות.
הקבוצות הנ"ל לא מהוות בסיס, אבל הן מהוות תת בסיס. כלומר, האוסף של החיתוכים הסופיים יהיה בסיס.
אז בסיס לטופולוגיית המכפלה הוא כל הקבוצות מהצורה

$$\left(\prod_{j\in J} O_j\right) \times \left(\prod_{i\in I\setminus J} X_i\right)$$

כאשר J היא איזשהי תת קבוצה סופית של I. וO_j הן קבוצות פתוחות במרחב X_j.
תרגיל: האם מכפלה אינסופית של מרחבים דיסקרטיים היא מרחב דיסקרטי?
פתרון: תלוי.
אם כל המרחבים חוץ ממספר סופי, יש בהם רק נקודה אחת, אז המרחב יהיה דיסקרטי.
צריך להראות שכל נקודון הוא פתוח. אז $\{(x_i)\} = \prod\{x_i\}$. מכיוון שחוץ ממספר סופי, כל המרחבים הם בעצמם נקודונים, אז בעצם יש לנו פה מכפלה של מספר של של קבוצות פתוחות (כי כל מרחב הוא דיסקרטי) כפול מכפלה של כל שאר המרחבים. וזה ממש קבוצה פתוחה בסיסית.
כעת נוכיח שאם יש מספר אינסופי של קבוצות בנות לפחות שני איברים, המרחב כבר לא יהיה דיסקרטי.
למעשה במקרה כזה כל הקבוצות הפתוחות יהיו אינסופיות.
כל קבוצה פתוחה מכילה קבוצה פתוחה בסיסית, אז מספיק להוכיח שהקבוצות הפתוחות הבסיסיות הן אינסופיות.

רק במספר סופי של מקומות אפשר לבחור מה תהיה הקבוצה, אפשר לשים שם אפילו נקודונים,

$$\left(\prod_{j\in J} O_j\right)\times\left(\prod_{i\in I\setminus J} X_i\right)$$

אז יש לנו מכפלה של מספר אינסופי של קבוצות בנות לפחות שני איברים, שזה בהכרח קבוצה אינסופית, ואפילו לא בת מניה.

למעשה, אפילו הקבוצה $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ עם הטופולוגיה הדיסקרטית על $0,1$ היא כבר נורא מיוחדת. היא הומיאומורפית לקבוצת קנטור במישור.

תרגיל: האם מכפלה של קבוצות סגורות בכל רכיב, היא סגורה?

$$\prod C_i$$

כאשר C_i סגורה בX_i.

פתרון: כן. כי

$$\left(\prod C_i\right)^c=\bigcup\left(C_j^c\times\left(\prod_{i\neq j} X_i\right)\right)$$

איחוד כלשהו של קבוצות פתוחות אפילו מהתת בסיס!

תרגיל: הוכיחו שמכפלה כלשהי של מרחבי האוסדורף היא האוסדורף.

פתרון: יהיו $(x_i)\neq(y_i)\in\prod X_i$. כלומר, קיים איזשהו j כך ש $x_j\neq y_j$. המרחב X_j הוא האוסדורף ולכן קיימות $x_j\in U, y_j\in V$ פתוחות וזרות.

$$(x_i)\in U\times\left(\prod_{i\neq j} X_i\right),(y_i)\in V\times\left(\prod_{i\neq j} X_i\right)$$

והן קבוצות פתוחות וזרות.

הערה: פונקציה $f:Y\to\prod X_i$ היא רציפה, אמ"ם לכל j, $\pi_j\circ f$ רציפה.

הגדרה: ניתן לקחת את קבוצת המכפלה ולהגדיר עליה טופולוגיה נוספת, שנקרא לה הbox topology כשבתור בסיס נקח את כל הקבוצות מהצורה $\prod O_i$ כאשר O_i פתוחות בX_i.

ניתן דוגמא לפונקציה רציפה בכל רכיב, שלא תהיה רציפה בטופולוגיית הקופסאות.

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$$

$$f(x)=(x,x,x....)$$

ברור שבכל רכיב היא רציפה, כי זה פונקציית הזהות.

נוכיח שהיא לא רציפה.

$$f^{-1}\left(\prod_{n\in\mathbb{N}}(-\frac{1}{n},\frac{1}{n})\right)$$

הקבוצה שלקחנו לה תמונה הפוכה היא פתוחה לפי הגדרת טופולוגיית הקופסאות.
אבל התמונה ההפוכה שלה היא $\{0\}$ שאינה פתוחה ב$\mathbb{R}$.

קשירות במכפלה

יהיו X_1, X_2 מרחבים טופולוגיים. מה הקשר בין הקשירות של X_1 וX_2 לקשירות של $X_1 \times X_2$?

תשובה: אם $X_1 \times X_2$ קשיר, אז כל אחד מהם קשיר. הסבר: נניח בשלילה שאחד המרחבים לא קשיר, למשל X_1. אז $X_1 = U \cup V$ פתוחות זרות לא ריקות. לכן

$$X_1 \times X_2 = (U \times X_2) \cup (V \times X_2)$$

אותה הוכחה תעבוד גם למכפלה אינסופית. ולכן אם מכפלה כלשהי של מרחבים היא קשירה, אז בהכרח כל אחד קשיר.

הוכחה נוספת: תמונה רציפה של מרחב קשיר היא קשירה. X_i הוא תמונה רציפה של המכפלה תחת פונקציית ההטלה.

בכיוון השני:

1. נוכיח שאם X_1, X_2 קשירות אז $X_1 \times X_2$ קשירה.

$$X_1 \times X_2 = U \cup V$$

$$\pi_1(U), \pi_1(V)$$

פתוחות. אבל לא בהכרח זרות. (יכול להיות שהקבוצות זרות בגלל הרכיב השני שלהן)

הוכחה: נוכיח שכל הנקודות נמצאות באותו רכיב קשירות.

כלומר נקח שתי נקודות $(x_1, x_2), (y_1, y_2)$ ונוכיח שיש קבוצה קשירה שמכילה את שתיהן.

נסתכל על שתי הקבוצות הבאות: $\{x_1\} \times X_2, X_1 \times \{y_2\}$ כל אחת מהקבוצות האלה קשירה, כי היא הומיאומרפית למרחב שמופיע שם.

$$(x_1, x_2) \in \{x_1\} \times X_2$$

$$(y_1, y_2) \in X_1 \times \{y_2\}$$

והחיתוך שלהן לא ריק, כי יש בו את (x_1, y_2). ולכן האיחוד שלהם קשיר.

מש"ל.

כעת נוכיח למרחב אינסופי.

אז נניח שX_i כולם קשירים, ואנחנו רוצים להוכיח ש$\prod X_i$ קשירה.

הוכחנו בעבר שאם למרחב יש תת קבוצה צפופה קשירה, אז הוא קשיר. (אולי ניסחנו: אם הקבוצה קשירה, הסגור קשיר)

ראשית, מכל מרחב נבחר נקודה $x_i \in X_i$.

נסתכל על תתי הקבוצות הבאות:

$$\left(\prod_{j \in J} X_j\right) \times \left(\prod_{i \in I \setminus J} \{x_i\}\right)$$

עבור כל תת קבוצה סופית $J \subseteq I$.
כל תת קבוצה כזאת היא קשירה, כי היא הומיאומורפית למכפלה סופית.
החיתוך של כולם לא ריק כי (x_i) שייך לכולם.
לכן האיחוד קשיר. (משפט אלומות)
כעת נותר להראות שהאיחוד הנ"ל צפוף ב$\prod X_i$. מספיק להוכיח שהוא נחתך עם כל קבוצה פתוחה בסיסית.
תהי

$$\left(\prod_{j\in J} O_j\right) \times \left(\prod_{i\in I\setminus J} X_i\right)$$

קבוצה פתוחה בסיסית.
היא נחתכת עם $\left(\prod_{j\in J} X_j\right) \times \left(\prod_{i\in I\setminus J} \{x_i\}\right)$
החיתוך שווה ל $\left(\prod_{j\in J} O_j\right) \times \left(\prod_{i\in I\setminus J} \{x_i\}\right)$

קומפקטיות

הגדרה: יהי X מרחב טופולוגי, תת קבוצה $A \subseteq X$ נקראת קומפקטית, אם לכל כיסוי פתוח של A יש תת כיסוי סופי. כלומר, אם $A \subseteq \bigcup O_i$, אז יש מספר סופי של קבוצות מתוכן, $O_{i_1}, ..., O_{i_n}$ כך ש $A \subseteq O_{i_1} \cup \cdots \cup O_{i_n}$.
תרגיל: יהי X מרחב טופולוגי, ו$A = \{x_n\} \cup \{x\}$ כאשר $x_n \to x$.
הוכיחו שA קומפקטית.
פתרון: נניח ש$A \subseteq \bigcup O_i$. אז יש איזשהו i_1 כך ש $x \in O_{i_1}$. מהגדרת התכנסות, החל ממקום מסויים כל איברי הסדרה נמצאים בתוך O_{i_1}. נשארנו עם מספר סופי של איברים מהסדרה, כל אחד מהם שייך לאיזשהי קבוצה, כלומר קיבלנו שA מוכלת במספר סופי של קבוצות.