

בוחר בחשבון אינפיניטסימלי 3 230-88 תשע"ו

מתרגל: אלעד עטייא

ט' טבת ה'תשע"ו 21.12.15

• יש לענות על כל השאלות. כל שאלה שווה 33 נקודות. שאלת הבונוס שווה 10 נקודות.

• נמקו כל צעד. נימוק לא מספק יפגע בציון.

• **רשמו ת.ז. ואת שמכם המלא.**

• משך הבוחן: שעתיים.

• חומר עזר מותר בשימוש: מחשבון מדעי בלבד.

• השאלות אינן מסודרות לפי רמת קושי.

1. יהי X מרחב מטרי. יהי $a \in X$ ויהי $r > 0$.

(א) הוכיחו שאם X מרחב נורמי, אזי $cl(B(a, r)) = B[a, r]$.

(ב) מצאו דוגמה נגדית למקרה בו X אינו מרחב נורמי.

2. כל הפונקציות בשאלה הן $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

(א) האם הפונקציה $f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$ דיפרנציאבילית בנקודה $(0, 0)$?

(ב) באלו נקודות הפונקציה: $f(x, y) = \begin{cases} \frac{\arcsin(xy-2)}{\arctan(3xy-6)} & (x, y) \neq (2, 1) \\ 0 & (x, y) = (2, 1) \end{cases}$ רציפה?

באלו נקודות היא אינה רציפה?

$$f(x, y) = \begin{cases} x \sin \frac{y^2}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

(ג) באלו נקודות הפונקציה דיפרנציאבילית?
 באלו נקודות היא אינה דיפרנציאבילית?

3. השאלה עוסקת בנגזרות כיווניות.

(א) חשבו את הנגזרת של $f(x, y, z) = xy^2z^3$ בכיוון הוקטור $h = (4, 3, 0)$ בנקודה $a = (3, 2, 1)$, עם וקטור כיוון שאורכו 1.

(ב) לפונקציה $f(x, y, z)$ נגזרות חלקיות רציפות בסביבת $M_0 = (1, 1, 2)$. ידוע ש:
 $f_x(M_0) = 1, f_y(M_0) = -2$. כמו כן, נתון שהנגזרת הכיוונית של f בנקודה M_0 לפי כיוון הוקטור $(2, 1, -2)$ עם וקטור כיוון שאורכו 1 שווה ל-1. מצאו את $\nabla f(M_0)$.

(ג) בנקודה $(1, 1, 1)$, באיזה כיוון הפונקציה $f(x, y, z) = x \arctan(yz)$ עולה בקצב הגדול ביותר? הגדירו כיוון זה על ידי וקטור שאורכו 1.

שאלת בונוס:

תהי $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה. קו גובה הוא אוסף הנקודות המקיים את המשוואה:
 $f(x, y) = C$ עבור $C \in \mathbb{R}$ כלשהו.
 הראו שהגרדיאנט, ∇f , מאונך לקווי הגובה.
 הדרכה: הציגו את קווי הגובה כמסילות.