

מבוא למהות וסאלטיקה - הרצאה 1

קואמבינאטיקה

תמורה (פרמוטציה) - סיפור (מחשב) של עצמים בשורה.

התמורה היא פונ' חת'ץ ולא מקבוצה לקבוצה עצמה.

מסמ'ן ק - ד

הקצרה תפי X קבוצה. פונ'  $X \rightarrow X$ : ס קרא

תמורה על X אן ס חת'ץ ולא.

פונ'מא: כמה אפשרויות ניתן לסדר 3 אלמ'ן בשורה?

פתרון: כאן מדובר במספר התמורות האפשריות.

ניתן שמי, נניח, ולא, פני, הקס.

הקס	פני	ולא	סיפור ראשון (עלא טיני)
הקס	ולא	פני	"
פני	ולא	הקס	"
פני	הקס	ולא	"
ולא	הקס	פני	"
ולא	פני	הקס	"

ז"א סה"כ 6 תמורות.

בדיק קצרה

↑  
3 אפ'

↑  
2 אפ'

↑  
1

→  $3 \cdot 2 \cdot 1 = 3! = \boxed{6}$

ס צניה (התלכה) מס האפשרות עסיוור מחזק של n אנשים בטור  
 הני . ונ

הוכחה: עכיר הרשן י n אפשרות עסני n-1  
 נניח באינדוקציה כי מספר האפ' עסיוור n-1  
 אנשים הוא  $(n-1)!$  ונקבל את הדורש.  
 $(1=0!)$  יסדה עסני היגדה

ס מה שקורה ← מס התמורה של הקבוצה  $\{1, 2, \dots, n\}$   
 הוא . ונ  
 (הסיוור הנל היה כלי חזרה)  
 (חזרה מן התיב)

כאשר נרצה לבדוק מהו מספר האפשרות עסיוור n  
 עומים, עם חזרה, פהינו חלק מהעומים להיק מסל  
 מס האפשרות ישתנה כאופן הבא:

1	מסל	עומים	$k_1$	כהנים
2	"	"	$k_2$	
			⋮	
l	מסל	עומים	$k_l$	

$$\frac{(k_1 + k_2 + \dots + k_l)!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_l!} = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_l!}$$

נקבל

פונקציה: מספר האפשרויות לפיקוד מחזק ש

המילה PEPPER

פתרון: אם האותיות הן שונות  $\leftarrow$  ABCDEF ו-6 אפשרויות

אפשרויות אחרות: אם מספר זה זהה, כפי שתינתה טוריות:

$P_1 E_1 P_2 P_3 E_2 R$

וכאן נקבל ו-6

במקרה ויש אותיות זהות כמו בפונקציה לעיל נקבל:

(אזכה 3 פא'ק)	P	1	מסוג	3
(" 2 ")	E	"	"	2

$$\frac{6!}{2! 3!}$$

ולכן

מוק הכפול: בניסוי בשני שלבים כאשר בשלב הראשון יש מ תוצאות אפשריות וכאשר יש מ תוצאות, אזי יש בניסוי מ.מ תוצאות אפשריות

(שלב שני, שלב ראשון) כאשר

$(1, 1) (1, 2) \dots (1, n)$   
 $(2, 1) \dots$   
 $\vdots$   
 $(m, 1) \dots (m, n)$

למשל  
 זריקה קובייה I  
 זריקה קובייה II  
 שלב קטן

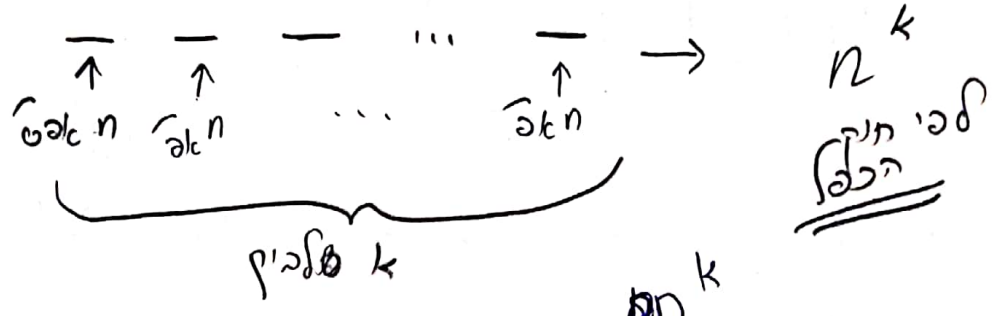
מוק הכפול המושלל: בניסוי עם א שלבים כך שבשלב ה- $i$

יש מ תוצאות אפשריות נקבל  $n_1, n_2, \dots, n_k$  תוצאות אפשריות

בתי-א א צמ"ק מתוך ח צמ"ק

מניחים בד"כ כי  $k \geq n$ .

בתי-א עם תמיד וצדן חשבון לפניה.  
(ניתן לכתוב את המספרים יחד)



אולי תפיקו משהו...

$PP_n^k$

פונקציה

1. צמ"ק 2 קובי. מס' האם בכל קובי הוא 6

$$\begin{array}{c} \uparrow \\ 6 \end{array} \begin{array}{c} \uparrow \\ 6 \end{array} = 36 \text{ אפשרות}$$

2. האם נמצא 3 פונקציות (או האם 3 נמצא)

$$\begin{array}{c} \uparrow \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \uparrow \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \uparrow \\ 2 \end{array} \rightarrow 2^3 = 8 \text{ אפשרות}$$

3. כמה אפשרות? כנ"ל 4 מספרים ניתן לכתוב אותם באמצעות מספרים 0, 1, 2, ..., 5?

פונקציות אלו מספר אפשרות וסדר יחיד אפשרות

$$\begin{array}{c} \uparrow \\ 6 \end{array} \begin{array}{c} \uparrow \\ 6 \end{array} \begin{array}{c} \uparrow \\ 6 \end{array} \begin{array}{c} \uparrow \\ 6 \end{array}$$

$\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$

$6^4$  אפשרות

אם מספרים הם 0-5 ולכן מספר אפשרות  $6^3$

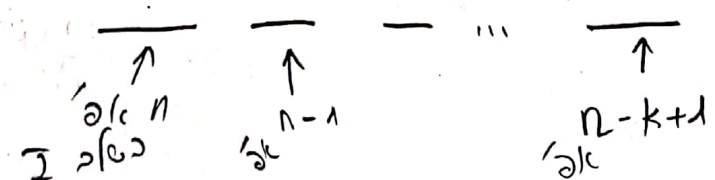
3) פירוקם של מופעי ראשונה ולכן יש להם 5 אפשרויות האלפים

$$\overline{5} \overline{6} \overline{6} \overline{6} \rightarrow \boxed{5 \cdot 6^3}$$

בחירה בעי חזרה ועם חסימה לעבר:

הקצרה: מספר התצפיות (Variations) הוא מס' האפשרויות לבחור א' עצמן מתוך n עצמן בטווח, כאשר אין לבחור א' אלו עצמן יותר מפעם אחת, אך ישנה חסימה לעבר הבחירה.

אופקיה  
יש חסימה לעבר  
 $P_n^k$



נקבל עפ"י הכפל:

$$n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!} = P_n^k$$

תרגיל: מביתה בת 8 בנים ו-12 בנות בוחרים ועוזרים להם 4 תלמידים. על התפקידים בוחרים שונים ולמטה (אם להיבחר 8 יותר מתפקיד אחד).

א. כמה אפשרויות ניתן לבחור את הוועד?  
ב. כמה אפשרויות ניתן לבחור את הוועד אם לכל תפקיד מתאים 3 תלמידים שונים?

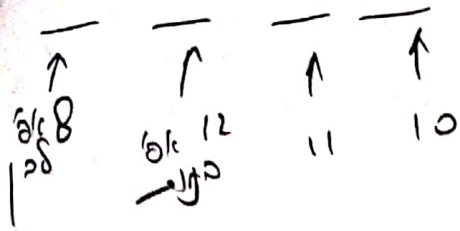
$$P_{20}^4 = \frac{20!}{(20-4)!} = 20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17$$

פתרון: א.  $n=20$   $k=4$

ב. פירוקו: נבחרו 3-3 תלמידים לתפקידים השונים, בחירה בן  $\frac{8!}{(8-3)!}$

שלב 2: 3 בנות מתוך 12,  $\frac{12!}{(12-3)!}$

פרק 2 תאריך



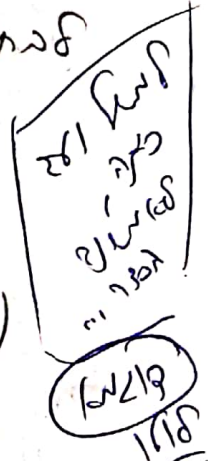
צירובים

מספר הצירובים  $C_n^k$  הוא מספר הצירובים

הצירובים (Combinations) הוא מספר הצירובים (Combinations) הוא מספר הצירובים... מספר הצירובים הוא מספר הצירובים... מספר הצירובים הוא מספר הצירובים...

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

מספר הצירובים הוא מספר הצירובים... מספר הצירובים הוא מספר הצירובים... מספר הצירובים הוא מספר הצירובים...



הצירובים הם צירובים של  $k$  איברים (יתר כמספר  $n-k$ )

$$P_n^k = C_n^k \cdot k!$$

↑ מספר הצירובים    ↑ מספר הצירובים    ↑ מספר הצירובים

~~מספר הצירובים~~ מספר הצירובים... מספר הצירובים הוא מספר הצירובים...

$n \in \mathbb{N}$  ויהי  $a, b \in \mathbb{R}$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$$

$a=b=1$

מספר הצירובים הוא מספר הצירובים...

כחיתר א צדמים למק n במי חטיגה פסור  
 וצמ חטטה

בא כחיתר  
 חטטה

יש למשוואה  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = k$  ?  
 סיקור לפתור את המשוואה: כמה פתרונות יש לה, איך למצואם

פתרון בסדר "כוכבית ומחזור"  
 נניח  $k = 1 + \dots + 1$  כספר של אפר (כוכבית)  
 ומתקין אותו בצורה  $n-1$  מחזור  $n-k$  אפר (כוכבית)

מס' האפשרות  $n-k$  מחזור  $n-k$  אפר  
 $\binom{n-k}{k}$  או  $\binom{n-k}{k}$  כוכבית  
 עם אפר נפרד כי  $n-k-1$  מחזור  $n-k$  אפר  
 צד  $k$  כוכבית !  $n-1$  מחזור

ונקבל  $\binom{n+k-1}{k}$  אפשרות

נשים לב כי יש התאמה מחדש ולא בין פתרונות  
 המשוואה לבין בעיה של אפר חטטה  
 מתוך  $\{1, \dots, n\}$  וההתאמה היא שמותן פתרון  
 $(x_1, \dots, x_n)$  הוא יצגור אפר חטטה  $n \geq 1$   
 אפר:  $x$  אפר

קולומב' כמה פתרונות? שאלה, אי אילו"ל  $\sum_{i=1}^n x_i \leq 200$

$$\sum_{i=1}^{100} x_i = 200$$

יש 100 משוואה

פתרון: שקול לטאה אחת חלק 200 כפולים בהיקף

8 100 תאים שונים (ההשתנה)  
200 (יחידות) שאלה (המחנה)

$$\binom{100 + 200 - 1}{200}$$

הפתרון:  
 $C_n^k$

קולומב' לרוב חריגה

לכמה פתרון

	$n$	$k$	כתיבה
$C$	$n$	$k$	$P$
כפי חטיב לספר	כפי חטיב לספר	כפי חטיב לספר	כפי חטיב לספר
$C_n^{n+k-1}$	$P_n^k$	$n^k$	כפי חטיב לספר
$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$	$P_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$		כפי חטיב לספר

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

עקרון ההכרה ומדויק: כי קודם,

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

שיש שני קו יוני פתח כמה איברי מקי"מ יכולה להיות...  
זו לא יכולה להיות, מאשר פתח כמה איברי מקי"מ פתח תולה את...