מבוא להסתברות וסטטיסטיקה - הרצאה 1

קומבינטוריקה

תמורה (פרמוטציה) - סידור (מחדש) של עצמים בשורה.

התמורה היא פונ' חח"ע ועל מקבוצה לקבוצה עצמה.

מסמנים ב- σ.

הגדרה: תהי X קבוצה. פונ' $\sigma: X \to X$ נקראת **תמורה** של X אם σ חח"ע ועל.

דוגמא: בכמה אפשרויות ניתן לסדר 3 אנשים בשורה?

פתרון: כאן מדובר במספר התמורות האפשריות.

ניתן שמות, נניח יעל, דני, הדס.

סידור ראשון (ללא שינוי)	יעל	דני	הדס
" שני	דני	יעל	הדס
" שלישי	הדס	יעל	דני
" רביעי	יעל	הדס	דני
" חמישי	דני	הדס	יעל
" שישי	הדס	דני	יעל

ז"א סה"כ 6 תמורות.

בדרך קצרה

___ 1   ___ 2 אפ'   ___ 3 אפ'

$\rightarrow 3\cdot2\cdot1 = 3! = \boxed{6}$

Scanned by CamScanner

טענה (הכללה): מס' האפשרויות לסידור מחדש של n אנשים בשורה הינו $n!$.

הוכחה: לבחירת הראשון יש n אפשרויות, לשני $n-1$.
נניח באינדוקציה כי מספר האפ' לסידור $n-1$ אנשים הוא $(n-1)!$, ונקבל את הדרוש.

($0!=1$ הגדרה לצרכי הרקורסיה)

טענה שקולה ← מס' התמורות של איברי הקבוצה $\{1,2,\dots,n\}$ הוא $n!$.

~~חזרה [illegible]~~

(הסידור הנ"ל היה בלי חזרה.)

כאשר נרצה לברר מהו מספר האפשרויות לסידור n עצמים, עם חזרות (עם חזרה), דהיינו חלק מהעצמים זהים ממש, מס' האפשרויות ישתנה באופן הבא:

בהינתן
k_1 עצמים מסוג 1
k_2 " " 2
⋮
k_l עצמים מסוג l

נקבל

$$\frac{(k_1+k_2+\dots+k_l)!}{k_1!\cdot\ldots\cdot k_l!}=\frac{n!}{k_1!\cdot\ldots\cdot k_l!}$$

Scanned by CamScanner

דוגמא: מספר האפשרויות לסידור מחדש של המילה PEPPER.

ABCDEF

פתרון: אם האותיות היו שונות ← $6!$ אפשרויות

אפשרות אחת למספר את הזהות כדי שתהיינה שונות:

$$P_1\ E_1\ P_2\ P_3\ E_2\ R$$

וכאן נקבל $6!$.

במידה ויש אותיות זהות כמו בדוגמא לעיל נקבל:

3 עצמים מסוג P (חזרה 3 פעמים)

2 " " E (" 2 ")

ולכן

$$\frac{6!}{2!\,3!}$$

חוק הכפל: בניסוי בשני שלבים כאשר בשלב הראשון יש m תוצאות אפשריות ובשלב השני יש n תוצאות, אזי יש בניסוי $m\cdot n$ תוצאות אפשריות

כאשר (שלב ראשון, שלב שני)

$$\begin{matrix} (1,1) & (1,2) & \cdots & (1,n) \\ (2,1) & & \ddots & \\ \vdots & & & \\ (m,1) & & \cdots & (m,n) \end{matrix}$$

למשל: זריקת קוביה והטלת מטבע נקבל שלב I, II

חוק הכפל המוכלל: בניסוי עם k שלבים כך שבשלב ה-i יש n_i תוצאות אפשריות נקבל $n_1\cdot n_2\cdot\ldots\cdot n_k$ תוצאות אפשריות.

Scanned by CamScanner

בחירת k עצמים מתוך n עצמים

יש חזרה
יש חשיבות לסדר
$\bar{P}^k$

מניחים בד"כ כי $k \le n$.

בחירה עם חזרה ועם חשיבות לסדר.
(ניתן לבחור איבר יותר מפעם אחת)

$$\underbrace{\underset{n\text{ אפש'}}{\_}\ \ \underset{n\text{ אפש'}}{\_}\ \ \_\ \cdots\ \underset{n\text{ אפש'}}{\_}}_{k\text{ שלבים}} \longrightarrow n^k$$

לפי חוק הכפל

$\bar{P}_n^k$

אולי תפקידים בממשלה...

דוגמאות:

1. זריקת 2 קוביות. מס' האפש' בכל קוביה הוא 6

$$\underset{6}{\_}\ \ \underset{6}{\_} = 36 \text{ אפשרויות}$$

2. הטלת מטבע 3 פעמים (או הטלת 3 מטבעות)

$$\underset{2}{\_}\ \ \underset{2}{\_}\ \ \underset{2}{\_} \longrightarrow 2^3 = 8 \text{ אפש'}$$

3. כמה מספרים (תקניים) בני 4 ספרות ניתן לרשום באמצעות הספרות $0,1,2,\dots,5$?

פתרון: אמנם סדר הספרות חשוב וספרה יכולה להופיע יותר מפעם אחת, נקבל

$$\underset{6}{\_}\ \ \underset{6}{\_}\ \ \underset{6}{\_}\ \ \underset{6}{\_}$$

6^4 אפשרויות

אך מספר לא יכול להתחיל ב-0 ולכן נחסר $\underline{0}\ \_\ \_\ \_$
6^3 אפשרויות

Scanned by CamScanner

3

פרק ב' 0 לא מופיע ראשונה ולכן יש רק 5 אפ' בספרת האלפים

$$\underset{5}{\_}\ \underset{6}{\_}\ \underset{6}{\_}\ \underset{6}{\_} \longrightarrow \boxed{5\cdot 6^3}$$

בחירה בלי חזרה ועם חשיבות לסדר:

הגדרה: מספר החליפות (Variations) הוא מס' האפשרויות לבחור k עצמים מתוך n עצמים שונים, כאשר אין לבחור את אותו עצם יותר מפעם אחת, ואך ישנה חשיבות לסדר הבחירה.

אין חזרה יש חשיבות לסדר P_n^k

$$\underset{n \text{ אפ' בשלב I}}{\_\_}\quad \underset{n-1 \text{ אפ'}}{\_\_}\quad \_\_ \ \cdots \ \underset{n-k+1 \text{ אפ'}}{\_\_}$$

נקבל לפי הכפל:

$$n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)=\frac{n!}{(n-k)!}=P_n^k$$

תרגיל: מכיתה בת 8 בנות ו-12 בנים בוחרים ועדה בת 4 תלמידים. כל התפקידים בועדה שונים. תלמיד לא יכול להיבחר ליותר מתפקיד אחד.

א. בכמה אופנים ניתן לבחור את הועדה?

ב. בכמה אופנים ניתן לבחור את הועדה אם לתפקיד מס' 1 יש לבחור אחת מהבנות ול-3 התפקידים הנותרים בנים?

פתרון: א. $n=20$ בנים $k=4$

$$P_{20}^4=\frac{20!}{(20-4)!}=20\cdot19\cdot18\cdot17$$

ב. פרק א' ניסוי דו-שלבי: שלב א' בחירת בת $\frac{8!}{(8-1)!}$

שלב ב': 3 בנים מתוך 12, $\frac{12!}{(12-3)!}=12\cdot11\cdot10$

Scanned by CamScanner

פרק ב' תא"ן

10   11   12 אפ' במינוי   8 אפ' לכן

צירופים

בחירה בלי חשיבות לסדר ובלי חזרה.

הגדרה: מספר הצירופים (Combinations) הוא מס' האפשרויות לבחור k איברים מתוך n איברים שונים, כאשר אין לבחור את אותו איבר יותר מפעם אחת (צ"א בלי חזרה) ובלי חשיבות לסדר הבחירה.

מספר האפשרויות יהיה

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$\binom{n}{k}$ נקרא "המקדם הבינומי".

לשנות ועד כיצה לשונים המספר

קומבינטוריקה לוון

הערה: כל צירוף של k איברים ניתן לסידור ב-$k!$ ~~אפשרויות שונות~~ אפ' שונות ומכאן

$$P_n^k = C_n^k \cdot k!$$

חליפות   תמורות ועד   סדר חשוב

נוסחת הבינום של ניוטון

יהיו $a,b \in \mathbb{R}$ ויהי $n \in \mathbb{N}$ אזי מתקיים:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

להוכיח בק' (מתמטית)

תרגיל: הוכח $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n$

פתרון: שימוש בבינום $a=b=1$.

4

בחירת k עצמים מתוך n בלי חשיבות לסדר ועם חזרה

בשורה

ניתן להסתכל על הבעיה כבעיית מילוי n תאים ב-k כדורים זהים

שקול לפתרון עבור השאלה: כמה פתרונות שלמים, אי שליליים יש למשוואה $x_1+x_2+\dots+x_n=k$?

נפתור בשיטת "כוכבים ומחיצות"

נציג את $k=1+\dots+1$ כסכום של אחדות (כוכבים) ומחלקים אותם בעזרת $n-1$ מחיצות ל-n שקים (אולי ריקים).

מס' האפשרויות לסדרות הבנויות מ-s כוכבים ו-$t-1$ מחיצות הוא $\binom{s+t}{s}$ או $\binom{s+t}{t}$

לכן אצלנו נקבל כי $n+k-1$ מס' המקומות שיש למלא עם k כוכבים ו-$n-1$ מחיצות

ונקבל $\binom{n+k-1}{k}$ אפשרויות.

נשים לב כי יש התאמה חח"ע ועל בין פתרונות המשוואה לבין בחירה ללא חשיבות לסדר ועם חזרה מתוך $\{1,\dots,n\}$, וההתאמה היא שבהינתן פתרון $(x_1,\dots,x_n)$ הוא יעבור לבחירה שבה $1\le i\le n$ נבחר x_i פעמים.

Scanned by CamScanner

דוגמא: כמה פתרונות שלמים, אי שליליים $0 \le x_i \in \mathbb{Z}$ יש למשוואה

$$\sum_{i=1}^{100} x_i = 200$$

פתרון: שקול לשאלה עבור חלוקת 200 כדורים זהים ל 100 תאים שונים (המשתנים)

200 (יחידות שלמות (האחדות))

הפתרון: CC_n^k

$$\binom{100+200-1}{200}$$

דוגמא נוספת בתרגול

טבלת סיכום

בחירת k מתוך n

	עם חשיבות לסדר	בלי חשיבות לסדר
עם חזרות	PP_n^k n^k	CC_n^k $\binom{n+k-1}{k}$
בלי חזרות	$P_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$	$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

עקרון ההכלה וההדחה: כידוע,

$$|A\cup B| = |A| + |B| - |A\cap B|$$

בדומה

$$|A\cup B\cup C| = |A| + |B| + |C| - |A\cap B| - |A\cap C| - |B\cap C| + |A\cap B\cap C|$$

שימושי שכן קל יותר לחשב כמה איברים מקיימים תכונה מכו"מ—, זוג או שלוש תכונות, מאשר לחשב כמה איברים מקיימים **לפחות** תכונה אחת.

Scanned by CamScanner