בוחן אמצע באינפי 1 – תש"ע 14/12/09

***יש לנמק היטב את התשובות לכל השאלות**

***שימו לב, פיתרון שאלה נוספת בחלק השני נחשב כבונוס.**

חלק ראשון: ציטוט הגדרות ומשפטים: (**30 נק'**)

1. צטט/י את הגדרת גבול של סדרה

תהי סדרה a_n ויהי מספר ממשי $L \in \mathbb{R}$. אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $n_0 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > n_0$ מתקיים $|a_n - L| < \varepsilon$, אזי L הוא גבול הסדרה a_n.

2. צטט/י את שלילת הגבול של סדרה

תהי סדרה a_n ויהי מספר ממשי $L \in \mathbb{R}$. אם קיים $\varepsilon > 0$ כך שלכל $n_0 \in \mathbb{N}$ קיים $n > n_0$ כך שמתקיים $|a_n - L| \geq \varepsilon$, אזי L אינו גבול הסדרה a_n.

בחר/י 4 מן 7 הסעיפים הבאים:

3. צטט/י את ההגדרה של סדרת קושי

תהי סדרה a_n. אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $n_0 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $m > n > n_0$ מתקיים $|a_n - a_m| < \varepsilon$, אזי a_n נקראת סדרת קושי.

4. צטט/י את משפט בולצאנו-וירשטראס לגבי נקודות הצטברות

לכל קבוצה $A \subseteq \mathbb{R}$ אינסופית וחסומה יש נקודת הצטברות.

5. צטט/י את למת קנטור

תהי I_n סדרת קטעים סגורים המוכלים זה בזה $I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq \ldots$, כך שאורך הקטעים שואף לאפס $|I_n| \to 0$ אזי קיימת נקודה c יחידה המשותפת לכל הקטעים $\forall n : c \in I_n$

6. צטט/י את ההגדרה של טור מתכנס, מתכנס בהחלט, וטור מתכנס בתנאי

טור $\sum a_n$ מתכנס אם סדרת הסכומים החלקיים שלו שואפת לגבול סופי. הטור $\sum a_n$ מתכנס בהחלט אם הטור $\sum |a_n|$ מתכנס. הטור $\sum a_n$ מתכנס בתנאי אם הוא מתכנס, אך אינו מתכנס בהחלט.

7. צטט/י את אקסיומת השלימות

תהי $A \subseteq \mathbb{R}$ חסומה מלעיל (מלרע) אזי יש לה חסם עליון (תחתון)

8. צטט/י את מבחן קושי להתכנסות טורים

יהי $\sum a_n$ טור חיובי ממש אזי:

אם $\overline{\lim}\sqrt[n]{a_n} > 1$ אזי הטור מתבדר

אם $\overline{\lim}\sqrt[n]{a_n} < 1$ אזי הטור מתכנס

אחרת לא ניתן לדעת

9. צטט/י את משפט לייבניץ

תהיי a_n סדרה מונוטונית לא עולה, חיובית ושואפת לאפס $a_n \to 0$, אזי הטור $\sum(-1)^n a_n$ מתכנס.

<u>חלק שני</u>: תרגילים

בחר/י 2 מבין 3 השאלות הבאות:

10. (**17 נק'**) יהיו $A, B \subseteq \mathbb{R}$ קבוצות לא ריקות כך שלכל $a \in A$ ולכל $b \in B$ מתקיים $a \le b$.
הוכח/י ש $\sup A \le \inf B$

פתרון: נניח בשלילה ש $\sup A > \inf B$ ניקח $\varepsilon = \dfrac{\sup A - \inf B}{2} > 0$ אזי $\dfrac{\sup A + \inf B}{2} = \sup A - \varepsilon$ שזה אמצע הקטע $[\inf B, \sup A]$. אבל לפי משפט קיים $a \in A$ כך ש $a > \sup A - \varepsilon$. $\inf B + \varepsilon = \dfrac{\sup A + \inf B}{2} = \sup A - \varepsilon$ אבל לפי משפט קיים $b \in B$ כך ש $b < \inf B + \varepsilon = \sup A - \varepsilon < a$. ובסיכום מצאנו $b < a$ בסתירה לנתון.

11. (**17 נק'**) תהי הסדרה המוגדרת על ידי כלל הנסיגה $a_{n+1} = \sqrt{a_n}$, ונתון $a_1 = c > 0$

a. עבור אילו ערכי c הסדרה מונוטונית עולה? יורדת?

פתרון: אם $0 < a < 1$ אזי $\sqrt{a} > a$ וגם $\sqrt{a} < 1$. ולכן אם $0 < c < 1$ כלומר $0 < a_1 < 1$ אזי $a_1 < a_2 < 1$. נוכיח באינדוקציה שזה נכון לכל n: $a_n < a_{n+1} < 1$. בדקנו עבור $n = 1$, נניח נכון עבור n נוכיח עבור $n+1$: צ"ל $a_{n+1} < a_{n+2} < 1$ אבל $a_{n+2} = \sqrt{a_{n+1}}$ ולפי ההנחה $a_{n+1} < 1$. לכן לפי מה שאמרנו, נובע ש $a_{n+1} < \sqrt{a_{n+1}} = a_{n+2}$ וש $a_{n+2} = \sqrt{a_{n+1}} < 1$ וזה מה שרצינו. כלומר הראנו שהסדרה מונוטונית עולה אם $0 < c < 1$.

אם $a > 1$ אזי $\sqrt{a} < a$ וגם $\sqrt{a} > 1$. באינדוקציה דומה לזו שלעיל, אם $c > 1$ אזי $a_n > a_{n+1} > 1$. כלומר הראנו שהסדרה מונוטונית יורדת אם $c > 1$.

אם $c = 1$ קל לראות שזו הסדרה הקבועה 1 ולכן היא מונוטונית עולה וגם יורדת. (לא עולה ממש או יורדת ממש).

b. עבור אילו ערכי c הסדרה מתכנסת?

פתרון: הוכחנו באינדוקציה בסעיף הקודם שאם $0<c<1$ הסדרה עולה וחסומה מלעיל ע"י 1, אם $c>1$ יורדת וחסומה מלרע ע"י 1 או קבועה אם $c=1$. לכן היא מונוטונית וחסומה ולכן מתכנסת לכל $c>0$

c. מה גבול הסדרה עבור ערכי c מהסעיף הקודם?

פתרון: כאשר a_n מתכנסת, נסמן $\lim a_n = L$, בוודאי $\lim a_{n+1} = L$ ולפי משפט $\lim\sqrt{a_n} = \sqrt{L}$. לפי נוסחת הנסיגה, $a_{n+1} = \sqrt{a_n}$. ניקח את הגבול של שני הצדדים ונקבל $L=\sqrt{L}$ ולכן $L=0,1$.
אבל אם $c\ge 1$ אזי $a_n \ge 1$ לכל n ולכן $L=\lim a_n \ge 1$ ולכן L בהכרח שווה 1. אם $0<c<1$ אז הסדרה מונוטונית עולה ולכן $a_n > c > 0$ לכל n ולכן $L=\lim a_n \ge c > 0$ ולכן בהכרח שווה 1.
בסיכום, גבול הסדרה תמיד 1 לכל $c>0$.

(**17 נק'**) נתונים טורים $\sum a_n^2$ ו $\sum b_n^2$ מתכנסים. הוכח $\sum a_n b_n$ מתכנס (שימו לב להבדל הקטן מתרגיל הבית)

הוכחה: $(|a_n|-|b_n|)^2 = a_n^2 - 2|a_n b_n| + b_n^2 \le a_n^2 + b_n^2$. $\sum a_n^2$ ו $\sum b_n^2$ מתכנסים ולכן הסכום שלהם $\sum a_n^2 + b_n^2$ מתכנס, ולפי מבחן ההשוואה גם $\sum (|a_n|-|b_n|)^2$ מתכנס. אבל $\frac{a_n^2 + b_n^2 - (|a_n|-|b_n|)^2}{2} = |a_n b_n|$ ולכן $\sum |a_n b_n| = \frac{1}{2}\sum a_n^2 + b_n^2 - (|a_n|-|b_n|)^2$. הטור הימני הוא סכום של טורים מתכנסים ולכן מתכנס, כלומר $\sum |a_n b_n|$ מתכנס. כלומר $\sum a_n b_n$ מתכנס בהחלט, וידוע שכל טור שמתכנס בהחלט מתכנס.

<u>חלק שלישי</u>: גבולות של סדרות והתכנסות טורים:

מצא/י את הגבולות הבאים: (**18 נק'**)

13. $a_n = \frac{3^n}{2^{\left(n^2\right)}}$

פתרון: $n^2 > 2n$ עבור $2 \le n$. לכן פרט לאיבר הראשון

$$0 \le \frac{3^n}{2^{\left(n^2\right)}} < \frac{3^n}{2^{2n}} = \frac{3^n}{\left(2^2\right)^n} = \left(\frac{3}{4}\right)^n \to 0$$

14. $a_n = \frac{\sin\left(\frac{n}{\pi}\right)}{n}$

פתרון: $\forall x: -1 \le \sin x \le 1$ כלומר $\sin\left(\frac{n}{\pi}\right)$ חסומה, $\frac{1}{n} \to 0$ ולפי משפט סדרה חסומה כפול סדרה ששואפת לאפס שואפת לאפס ולכן $a_n \to 0$

15. $a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n{}^2+\frac{1}{2}$, נתון ש a_n מתכנסת.

פתרון: ניקח גבול בשני הצדדים, $\lim a_{n+1}=\lim\left[\frac{1}{2}a_n{}^2+\frac{1}{2}\right]$ ולפי אריתמטיקה של גבולות

$\lim a_n=\lim a_{n+1}=L=\frac{1}{2}L^2+\frac{1}{2}$ והפתרון היחיד למשוואה הזו הוא $L=1$.

קבע/י לגבי 3 מתוך 4 הטורים הבאים האם הם מתכנסים בהחלט, בתנאי או מתבדרים: (**18 נק'**)

16. $\sum\frac{(-1)^n}{n}$

פתרון: $\frac{1}{n}$ סדרה מונוטונית יורדת חיובית ושואפת לאפס, ולכן לפי לייבניץ הטור $\sum(-1)^n\frac{1}{n}$ מתכנס. ידוע שהטור אינו מתכנס בהחלט כי $\sum\left|\frac{(-1)^n}{n}\right|=\sum\frac{1}{n}=\infty$

17. $\sum\frac{e^3\cdot n^3}{(\ln 3)^n}$

פתרון: נפעיל את מבחן השורש של קושי: $\sqrt[n]{\frac{e^3\cdot n^3}{(\ln 3)^n}}=\frac{\sqrt[n]{e^3\cdot n^3}}{\ln 3}=\frac{\left(\sqrt[n]{e}\right)^3\left(\sqrt[n]{n}\right)^3}{\ln 3}\to\frac{1\cdot 1}{\ln 3}<1$ ולכן הטור מתכנס. מכיוון שכל איברי הטור חיוביים הטור מתכנס בהחלט.

18. $\sum\frac{n!}{(-2)^n}$

פתרון: נסתכל על סדרת האיברים $|a_n|=\left|\frac{n!}{(-2)^n}\right|=\frac{n!}{2^n}$, נראה באינדוקציה פשוטה ש $n!>2^n$ לכל $n\geq 4$. נבדוק עבור $n=4$, $4!=24>16=2^4$. נוכיח עבור $n+1$, $(n+1)!>(n+1)2^n>2\cdot 2^n=2^{n+1}$. ולכן $\frac{n!}{2^n}>1$ ולכן $\lim|a_n|=\lim\frac{n!}{2^n}\geq 1$ ולכן $\lim|a_n|\neq 0$
ולכן לפי משפט $\lim a_n\neq 0$ ולכן הטור אינו מתכנס בכלל.

19. $\sum\frac{\sin(n!)}{n^2}$

פתרון: $\left|\frac{\sin(n!)}{n^2}\right|\leq\frac{1}{n^2}$. ידוע ש $\sum\frac{1}{n^2}$ מתכנס ולכן לפי מבחן ההשוואה $\sum\frac{\sin(n!)}{n^2}$ מתכנס בהחלט.