קואורדינאטות במרחב וקטורי:

הגדרה: יהי $e_1, \dots, e_n$ בסיס למרחב וקטורי V, לכל $x \in V$ קיימת הצגה יחידה $x = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n$. הסדרה $x_1, x_2, \dots, x_n$ נקראת הקואורדינאטות של x ביחס לבסיס $[e]$.

מטריצת מעבר בין בסיסים: יהיו $[e], [e']$ שני בסיסים למרחב וקטורי V אזי כל וקטור בבסיס $[e']$ ניתן להציג כצירוף ליניארי של איברי הבסיס $[e]$.

מטריצת המעבר C מ-$[e]$ ל-$[e']$ הינה מטריצה אשר בה העמודה ה-i הינה הקואורדינאטות של $e_i{}'$ ביחס לבסיס $[e]$ כלומר: $C = \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}$.

מתקיים השוויון $[e'_1, \dots, e'_n] = [e_1, \dots, e_n]C$.

טענה: יהי $x \in V$ כך ש- $x = x_1e_1 + \dots + x_ne_n$ וגם $x = x'_1e'_1 + \dots + x'_ne'_n$, מתקיים $\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = C \begin{bmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix}$ כאשר C היא מטריצת המעבר מ-$[e]$ ל-$[e']$.

למה: $v_1, \dots, v_k \in V$ ו – $A_{k\times p}$ מטריצת סקלרים, אם $[v_1, \dots, v_k]A = [\theta, \theta, \dots, \theta]$ אזי $A = 0$.

טענה: מטריצת מעבר בין בסיסים תמיד הפיכה.

טרנספורמציות ליניאריות:

טענה: תהי φ טרנספורמציה ליניארית, אז בהכרח מתקיים $\varphi(\theta_v) = \theta_w$

טענה: אם פונקציה ט"ל אזי תמונה של סדרה תלויה ליניארית בהכרח תלויה ליניארית.

טענה: אם φ מונומורפיזם אזי היא מעבירה סדרה בת"ל לסדרה בת"ל.

טענה: φ חח"ע $\Leftrightarrow$ $ker\varphi = \{\theta_v\}$.

משפט: תהי $\varphi: V \to W$ ונניח V נוצר סופית, אזי $Im\varphi$ גם נוצר סופית ומתקיים: $\dim(ker\varphi) + \dim(Im\varphi) = dimV$.

למה: אם $e_1, \dots, e_k$ בסיס של $ker\varphi$ ונשלים את הסדרה לבסיס של V באמצעות $e_{k+1}, \dots, e_n$ אזי $\varphi(e_{k+1}), \dots, \varphi(e_n) \in W$ בסיס של $Im\varphi$.

טענה: V, W מ"ו נוצרים סופית, אם קיים איזומורפיזם $\varphi: V \to W$ אזי $dimV = dimW$.

מטריצה של טרנספורמציה ליניארית:

הגדרה: יהיו V, W מ"ו נוצרים סופית מעל F ו- $dimV = n, dimW = m$. נקבע בסיסים $[e]$ ב-V ו-$[\xi]$ ב-W. תהי $\varphi: V \to W$ ט"ל, אזי נגדיר $A_{m\times n}$ מטריצה של הטרנספורמציה ביחס לבסיסים $[e]$ ו- $[\xi]$ בצורה הבאה: העמודה ה-j של המטריצה מוגדרת כעמודת הקואורדינאטות של הוקטור $\varphi(e_j)$ על פי הבסיס ξ (כלומר $C_j = [\varphi(e_j)]_\xi$).

משפט: אם A מטריצה של הטרנספורמציה $\varphi: V \to W$ לפי הבסיסים $[e]$ ו-$[\xi]$ (של V ו-W בהתאמה) ו- $x \in V$ כך ש – $[x]_e = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ אזי מתקיים:

$$A[x]_e := A \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = [\varphi(x)]_\xi$$

מסקנה מהמשפט: טרנספורמציות ליניאריות מאופיינות באופן יחיד על ידי המטריצה שלהן

משפט: $\varphi: V \to W$, B מטריצת מעבר מ-$[\xi]$ ל-$[\xi']$ בסיסים של W, ו-C מטריצת מעבר מ-$[e]$ ל-$[e']$ בסיסים של V.

אם A מטריצה של φ ביחס ל-$[e], [\xi]$ ו-A' מטריצה של φ ביחס ל-$[e'], [\xi']$ אזי מתקיים: $A' = B^{-1}AC$.

מרחב הטרנספורמציות הליניאריות: יהיו V, W מ"ו מעל אותו שדה נסמן $\mathcal{L}(V, W) = \{\varphi: V \to W \mid \varphi \text{ is a linear map}\}$, אם פעולות של כפל בסקלר וחיבור ט"ל זהו מרחב וקטורי.

משפט: נסמן $dimV = n, dimW = m$ אזי הפונקציה $T: \mathcal{L}(V, W) \to Mat_{m\times n}(F)$ המוגדרת על ידי $T(\varphi) = A_\varphi$ הינה ט"ל ואיזומורפיזם של מרחבים וקטוריים.

מסקנה מהמשפט: $dim\mathcal{L}(V, W) = m * n$

המרחב הדואלי

טענה: כל $\phi \in (\mathrm{F}^n)^*$ הוא מהצורה של $\phi = \phi_a$ עבור $a \in F^n$ כלשהוא. יתר על כן a הוא יחיד.

קווים להוכחה: מראים יחידות על ידי הנחת $\phi_a = \phi_b$ והפעלת שתי הפונקציונליים על הבסיס הסטנדרטי, מקבלים $a = b$. מראים קיום על ידי הגדרת $a_i := \phi(e_i)$ והצבת וקטור כללי בפונקציונל.

הבסיס הדואלי: יהי V מ"ו ממימד סופי מעל שדה F ויהי $e_1, e_2, \dots, e_n$ בסיס ל-V. לכל $1 \le i \le n$ נגדיר $\epsilon_i \in V^*$ בצורה הבאה: $\epsilon_i(v) = \epsilon_i\left(\sum_j x_je_j\right) := x_i$ (כלומר הקואורדינטה ה-i של הוקטור על פי הבסיס $[e]$).

טענה: הקבוצה $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n$ מהווה בסיס ל-V^*. ועבור כל פונקציונל ב-V^* מתקיים: $\phi = \phi(e_1)\epsilon_1 + \phi(e_2)\epsilon_2 + \dots + \phi(e_n)\epsilon_n$. (מוכיחים באמצעות זה שמראים שהקבוצה בת"ל).

שיטה למציאת בסיס דואלי: אם $b_1, \dots, b_n$ בסיס ל-V ו- $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$ הבסיס הדואלי מתקיים: $\begin{pmatrix} \cdots & \epsilon_1 & \cdots \\ & \vdots & \\ \cdots & \epsilon_n & \cdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ b_1 & \cdots & b_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} = I_n$

המאפס: יהי V מ"ו מעל שדה F ו- $S \subseteq V$ תת קבוצה, אזי המרחב המאפס של S הינו: $S^0 = \{\phi \in V \mid \forall s \in S \quad \phi(s) = 0\}$, S^0 הינו תת מרחב של המרחב הדואלי.

טענה: $S_1 \subseteq S_2 \leftarrow S_2^0 \subseteq S_1^0$

טענה: לכל משפחה של תתי קבוצות $\{S_\alpha\}$ של V מתקיים: $(\cup_\alpha S_\alpha)^0 = \cap_\alpha(S_\alpha^0)$

טענה: $(spanS)^0 = S^0$

משפט: V מרחב וקטורי ממימד סופי ו-M תת מרחב של V אזיי מתקיים: $dimV = dimM + dimM^0$.

רעיון ההוכחה: בוחרים $e_1, \dots, e_m$ בסיס ל-M ומשלימים לבסיס ל-V עם $e_{m+1}, \dots, e_n$. מסתכלים על הבסיס הדואלי ל-$[e]$ ומוכיחים ש- $\epsilon_{m+1}, \dots, \epsilon_n$ בסיס ל-M^0 (מראים קודם שייכות לקבוצה ואז פרישה) מכך נובע השיוויון המבוקש.

למה: (הוכח במסגרת ההוכחה של המשפט $dimV = dimM + dimM^0$ בכיתה, ייתכן שצריך להוכיח לבד במבחן): $M \subset V$ תת מרחב ו-$e_1, \dots, e_m$ בסיס ל-M, $e_{m+1}, \dots, e_n$ השלמה לבסיס של V. נסמן ב- $[\epsilon]$ את הבסיס הדואלי ל-$[e]$, אזי $\epsilon_{m+1}, \dots, \epsilon_n$ בסיס ל-M^0.

תת מרחב אפסים: תהי $T \subset V^*$ תת קבוצה, תת מרחב אפסים T_0 הינו : $T_0 = \{x \in V \mid \forall t \in T \quad t(x) = 0\}$.

טענה: $T_0 \subset V$ הינו תת מרחב לינארי.

טענה: $T_1 \subset T_2 \leftarrow (T_2)_0 \subset (T_1)_0$.

טענה: $(\cup_\alpha T_\alpha)_0 = (\cap_\alpha(T_\alpha)_0$.

משפט: יהי V נוצר סופית ו- $N \subset V^*$ תת מרחב לינארי, אזי מתקיים: $dimN_0 + dimN = dimV$ (הוכחה באמצעות האיזומורפיזם הקנוני $C: V \to V^{**}$)

משפט: אם $M \subset V$ תת מרחב אזי $(M^0)_0 = M$.

משפט: $N \subset V^*$ תת מרחב אזי $(N_0)^0 = N$.

טענה שניתנה כתרגיל: $S \subset V$ תת קבוצה, אזי $(S^0)_0 = spanS$

טענה שניתנה כתרגיל: $T \subset V^*$ תת קבוצה, אזי $(T_0)^0$.

מרחב דואלי שני:

הגדרה: יהי V מ"ו אזי מרחב דואלי שני הינו $V^{**} = (V^*)^*$.

קיים איזומורפיזם קנוני טבעי $C: V \xrightarrow{\sim} V^{**}$ אשר מוגדר באופן הבא:

$$\forall x \in V \ \ [C(x): V^* \to F, \ \ \forall \xi \in V^* \ C(x)(\xi) = \xi(x)]$$

טענה: יהי V מ"ו נוצר סופית ו-$T \subset V^{**}$ תת קבוצה אזי $C(T_0) = T^0$ (נשים לב ש- $T_0 \in V$ וגם ש- $T^0 \in V^{**}$ כלומר כל הפונקציונאלים ב-V^{**} אשר מתאפסים על כל הפונקציונאלים ב-T).

מרחב מכפלה פנימית

הגדרה: מרחב מכפלה פנימית הינו מ"ו V מעל R עם פונקציה $<,>: V \times V \to R$ שמקיימת את התכונות הבאות:

ליניאריות ביחס לכל משתנה: $< \lambda_1x_1 + \lambda_2x_2, y > = \lambda_1 < x_1, y_1 > + \lambda_2 < x_2, y >$ (באופן דומה מתקיים עבור y)

סימטריה: $< x, y > = < y, x >$

חיובית: $\forall x \in V \ < x, x > \ge 0 \ \& < x, x > = 0 \to x = \theta$

נורמה: (אורך) מוגדרת כ-$\|x\| = \sqrt{< x, x >}$.

משפט: תכונות של נורמה:

1. $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$ 2. $x = \theta \leftrightarrow \|x\| = 0$

3. אי שוויון המשולש $\|x + y\| \le \|x\| + \|y\|$, יתרה מכך השוויון מתקבל אם ורק אם $x \propto y$

אי שוויון קושי שוורץ: $|< x, y >| \le \|x\|\|y\|$, השוויון מתקבל אם ורק אם x ו-y פרופורציוניים. (מהמשפט נובע גם $< x, y > \le \|x\|\|y\|$ וכאן מתקבל שוויון $\Leftrightarrow$ $x = \lambda y \ \& \lambda > 0$.

זווית בין וקטורים: הזווית בין שני וקטורים מוגדרת כ- $\angle x, y = \arccos\frac{<x,y>}{\|x\|\|y\|}$

משפט ריס: יהי V מרחב אוקלידי, אזי כל פונקציונל ליניארי על V הוא מהצורה $\varphi_a(x) := < x, a >$ כאשר $a \in V$ מוגדר באופן יחיד. יתרה מזאת פונקציה $V \to V^*$ אשר מוגדרת $a \mapsto \varphi_a$ היא איזומורפיזם של מרחבים וקטוריים.

אורתוגנאליות:

הגדרה: וקטורים $x, y \in V$ נקראים אורתוגונאליים אם $< x, y > = 0$.

סדרה אורתוגונאלית: $x_1, \dots, x_s \in V$ נקראת סדרה אורתוגונאלית אם הוקטורים מאונכים זה לזה כלומר $\forall i \ne j \ < x_i, x_j > = 0$.

סדרה אורתונורמלית: סדרת וקטורים נקראת אורתונורמלית אם היא אורתוגונאלית וגם הנורמה של כל וקטור היא 1, כלומר מתקיים

טענה: אם סדרה של וקטורים שונים מ-θ אורתוגונאלית אזי היא בלתי תלויה ליניארית.

טענה: יהי $\xi_1, \dots \xi_n \in V$ בסיס אורתונורמלי אזי

$$\forall x \in V \ \ x = \sum_{i=1}^n < x, \xi_i > \xi_i$$

משפט קיום הבסיס האורתונורמלי: בכל מרחב אוקלידי קיים בסיס אורתונורמלי.

משלים אורתוגונאלי: יהי V מרחב אוקלידי ו-$M \subset V$ תת מרחב. נגדיר משלים אורתוגונאלי של M באופן הבא $M^\perp = \{x \in V \mid < x, y > = 0 \ \forall y \in M\}$:

משפט: אם $M \subset V$ תת מרחב ליניארי מתקיים $M \oplus M^\perp = V$

מטריצה אורתוגונאלית: מטריצה ממשית $C_{n\times n}$ נקראת אורתוגונאלית אם $C^tC = I_n$.

משפט: יהי $[e]$ בסיס אורתונורמלי ב-V ו-$[\xi]$ בסיס כלשהו ב-V אזי הבסיס $[\xi]$ הינו אורתונורמלי $\Leftrightarrow$ מטריצת המעבר בין הבסיסים היא אורתוגונאלית.

טענה: כפל של שתי מטריצות אורתוגונאליות הוא מטריצה אורתוגונאלית.

תכונות מטריצה אורתוגונאלית:

אם C מטריצה אורתוגונאלית אזי $\det(C) = \pm 1$

אם נתבונן ב-R^n במרחב האוקלידי הסטנדרטי אזי $R_1,\dots,R_n$ בסיס אורתונורמלי של R^n. בנוסף גם $C_1,\dots,C_n$ בסיס אורתונורמאלי ב-R^n (כי גם C^t אורתוגנאלית).

גראם שמידט: בסיס $\{x_1,..,x_n\}$ של מרחב אוקלידי ורוצים ליצור בסיס אורתונורמלי אזי: $u_1 = x_1,\ u_k = x_k - \sum \frac{\langle x_k,u_i\rangle}{\langle u_i,u_i\rangle} u_i$

בכל שלב בתהליך ה-span זהה. בסיום התהליך מנרמלים את כל הוקטורים

טרנספורמציות במרחבים אוקלידים:

הגדרה: יהיו V,W מרחבים אוקלידים, ט"ל $T: V\to W$ נקראת איזומורפיזם של מרחבים אוקלידים אם T איזומורפיזם וגם $\forall x,y\in V <x,y>_V = <Tx,Ty>_W$

משפט: יהיו V,W מרחבים אוקלידים ו-$dimV = dimW$, $T:V\to W$ ט"ל, אזי: T איזומורפיזם של מרחבים אוקלידים $\Leftrightarrow$ $\forall x\in V\ \|x\|_V = \|Tx\|_W$

משפט: V,W מרחבים אוקלידים ו-$T:V\to W$ ט"ל מתקיים:

1. אם T איזומורפיזם של מרחבים אוקלידים אזי המטריצה של T ביחס לכל זוג של בסיסים אורתונורמלים היא אורתוגונאלית.
2. אם $[e],[\xi]$ בסיסים אורתונרמאליים של V,W בהתאמה והמטריצה של T ביחס ל-$[e],[\xi]$ אורתוגונאלית אזי T איזומורפיזם של מרחבים אוקלידים.

טרנספורמציה אורתוגונאלית: $T:V\to V$ איזומורפיזם של מרחבים אוקלידים, נאמר ש-T טרנספורמציה אורתוגונאלית.

דטרמיננטה של ט"ל: $\varphi: V\to V$ ט"ל, נבחר בסיס כלשהו ל-V. תהי A מטריצה של φ ביחס לבסיס הזה, נגדיר $det\varphi := detA$.

טענה: $det\varphi$ אינה תלויה בבחירת הבסיס ולכן מוגדרת היטב.

מסקנה: $\varphi: V\to V$ טרנספורמציה אורתוגונאלית $\Leftrightarrow$ $det\varphi = \pm 1$

מיון של טרנספורמציות אורתוגונאליות $R^2\to R^2$: כל טרנספורמציה אורתוגונאלית $T: R^2\to R^2$ היא או סיבוב בזווית מסוימת או שיקף ביחס לציר מסוים.

מטריצת סיבוב בזווית θ: $\begin{bmatrix}cos\theta & -sin\theta\\ sin\theta & cos\theta\end{bmatrix}$ (ביחס לבסיס הסטנדרטי, נגד כיוון השעון)

מטריצת שיקוף ביחס לציר: $\begin{bmatrix}cos\theta & sin\theta\\ sin\theta & -cos\theta\end{bmatrix}$ הציר בזווית $\frac{\theta}{2}$ ביחס לווקטור הבסיס e_1.

סכום מרחבים וסכום ישר:

סכום תתי מרחב: יהיו $M_1,\dots,M_s\subset V$ תתי מרחב ליניאריים. נגדיר סכום שלהם על ידי: $M_1+\dots+M_s := span\{M_1\cup M_2\cup\dots\cup M_s\}$.

טענה: $M_1+\dots+M_s = \{x_1+\dots+x_s \mid x_i\in M_i\ \forall 1\le i\le s\}$

משפט: יהי V מרחב וקטורי ו-$M,N\subset V$ תתי מרחב נוצרים סופית, אזי $M+N$ תת מרחב נוצר סופית ומתקיים $\dim(M+N) = dimM + dimN - \dim(M\cap N)$.

סכום ישר: יהיו $M_1,\dots,M_s\subset V$ תתי מרחב ליניאריים הסכום $\sum_{i=1}^s M_i$ נקרא סכום ישר אם לכל $1\le i\le s$ מתקיים $M_i\cap\left(\sum_{j=1,j\ne i}^s M_j\right)$. נסמן $M_1\oplus M_2\oplus\dots\oplus M_s$

משפט: יהי V מ"ו נוצר סופית ונניח $V = M_1+\dots+M_s$, אזי הטענות הבאות שקולות:

1. לכל $V = M_1\oplus M_2\oplus\dots\oplus M_s$
2. $x\in V$ קיימת הצגה יחידה $x = a_1+a_2+\dots+a_s$ כך ש-$a_i\in M_i$.
3. קיים $x\in V$ שעבורו ההצגה $x = a_1+a_2+\dots+a_s$ כך ש-$a_i\in M_i$ היא יחידה.
3. אם $\theta = a_1+a_2+\dots+a_s$ כך ש-$a_i\in M_i$ אזי $a_i=\theta$ $\forall 1\le i\le s$.
4. נסמן ב- $E^{(i)}$ קבוצת וקטורים שהינה בסיס של M_i אזי $E^{(1)}\cup E^{(2)}\cup\dots\cup E^{(s)}$ בסיס של V.
5. $dimV = dimM_1+\dots+dimM_s$

מטריצות

משפט: כפל מטריצות היא פעולה דיסטריבוטיבית מעל חיבור מטריצות, וכן קיימת אסוציאטיביות של כפל מטריצות

משפט: פעולת ה- transpose מוגדרת על ידי $(A^t)_{ij} = (A)_{ji}$

ומתקיים: 1. $(A^t)^t = (A)$

2. $(A+B)^t = A^t + B^t$ 3. $(\lambda A)^t = \lambda A^t$ 4. $(AB)^t = B^tA^t$

טענה: כל מטריצה ניתן לבטא באמצעות סכום של מטריצה סימטרית ($A = A^t$) ומטריצה אנטי סימטרית ($A=-A^t$).

כפל במטריצית בלוקים: $\begin{pmatrix}A&B\\C&D\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X&Y\\Z&W\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}AX+BZ & AY+BW\\ CX+DZ & CY+DW\end{pmatrix}$.

מטריצות הפיכות

משפט: נתונה מערכת משוואות לינארית בת n משוואות ו-n משתנים – $Ax=b$. אם A הפיכה אזי קיים למערכת פתרון יחיד והוא $A^{-1}b$.

משפט: תהי A מטריצה ריבועית הפיכה אזי מתקיים:

1. A^t הפיכה ו- $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$
2. אם גם B מטריצה הפיכה $n\times n$ אזי AB הפיכה ומתקיים $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

הגדרה: מטריצה אלמנטרית $\phi(I_n)$ הינה מטריצה שמתקבלת מהפעלת פעולת אלמנטרית אחת ϕ על מטריצת היחידה I_n.

הגדרה: פעולה אלמנטרית הופכית ϕ^{-1} מוגדרת כך ש – $\phi^{-1}(\phi(A)) = A$ לכל A.

משפט: ביצוע פעולה אלמנטרית ϕ על המטריצה $A_{m\times n}$ שקולה לכפל משמאל במטריצה אלמנטרית מתאימה: $\phi(A) = \phi(I_m)A$.

משפט: כל מטריצה אלמנטרית היא הפיכה.

למה: כל מטריצה ניתן להציג כמכפלה של מטריצות אלמנטריות במטריצה מדורגת קנונית.

משפט: תהי A מטריצה נדרג אותה קנונית ונקבל $B = \phi_1(\phi_2(\dots(\phi_k(A)\dots)$.

A הפיכה $\Leftrightarrow$ $B = I_n$. במקרה זה $A^{-1} = \phi_1(\phi_2(\dots\phi_k(I_n)..)$.

משפט: תהי A מטריצה $n*n$ אזי הטענות הבאות שקולות:

1. A הפיכה. 2. לכל עמודה $b\in R^n$ למערכת $Ax=b$ קיים פתרון יחיד.

3. קיימת עמודה $b\in R^n$ כך שלמערכת $Ax=b$ קיים פתרון יחיד.

4. $A\sim I_n$.

משפט: תהי A מטריצה $n*n$, הטענות הבאות שקולות:

1. A הפיכה (מניחים עמודות בת"ל ומראים שלמערכת $Ax=0$ פתרון יחיד).
2. השורות של A בת"ל (נובע מכך שגם A^t הפיכה).
3. העמודות של A בת"ל (מניחים הפיכות ומשתמשים בכך של- $Ax=0$ קיים פתרון יחיד).

טענה: המטריצות (ההפיכות) היחידות אשר מתחלפות עם כל המטריצות (כלומר מטריצה B המקיימת $AB=BA$) הינן מטריצות סקלריות, כלומר מטריצות מהצורה λI_n

דרגת המטריצה

הגדרה: הדרגה של המטריצה הינו המימד של המרחב הנפרש על ידי שורותיה.

משפט: אם A_{n*n} ו- $rk(A) = n$ אזי: A הפיכה

2. $span\{R_1,R_2,..,R_n\} = \mathbb{R}^n$

משפט: אם $A\sim B$ אזי $rk(A) = rk(B)$.

משפט: $rk(A^t) = rk(A)$.

משפט: דרגה של מטריצה מדורגת (לאו דווקא קנונית) שווה למספר השורות השונות מ- 0 (מראים שכל השורות של A השונות מ-0 בת"ל, באינדוקציה).

משפט: $rk(AB)\le \min\{rk(A),rk(B)\}$

(ת) טענה: $rk(A+B)\le rk(A)+rk(B)$ (מראים באמצעות הכלה של מרחב השורות של $A+B$ באיחוד מרחבי השורות של A ו-B).

טענה: תהי A מטריצה $m\times n$, נסמן ב-$N(A)$ את מרחב הפתרונות של המערכת $(A|0)$. מתקיים: $dimN(A) = n - rk(A)$. (הוכחה: מדרגים, ואז מסבירים שהמימד של מרחב הפתרונות הוא מס' העמודות שאין בהן אחד פותח, והדרגה היא מספר השורות שיש בהן אחדות פותחים) .

דטרמיננטה

הגדרה לפי תכונות: דטרמיננטה היא פונקציה שתחומה $M_n(R)$ המקיימת:

1. לינאריות ביחס לכל שורה בחיבור $\det(R_1,\dots,R_i+R_j,\dots,R_n) = \det(R_1,..,R_i,..,R_n) + \det(R_1,\dots,R_j,\dots,R_n)$
2. לינאריות ביחס לכל שורה בכפל בסקלר: $\det(R_1,\dots,\lambda R_i,..,R_n) = \lambda\det(R_1,\dots,R_i,..,R_n)$
3. אם למטריצה יש שתי שורות זהות אזי $\det(A) = 0$.
4. $\det(I_n) = 1$.

משפט: עבור פעולה אלמנטרית $\phi := R_i \leftrightarrow R_j$ מתקיים $det\phi(A) = -\det(A)$.

משפט: עבור פעולה אלמנטרית $\phi := R_i\to\lambda R_i$ מתקיים $det\phi(A) = \lambda\det(A)$.

משפט: עבור פעולה אלמנטרית $\phi := R_i\to R_i - \lambda R_j$ מתקיים $det\phi(A) = \det(A)$.

משפט: יהיו A,B מטריצות $n\times n$ אזי מתקיים: $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

משפט: מטריצה A הפיכה $\Leftrightarrow$ $\det(A)\ne 0$.

משפט: $detA = detA^t$.

הגדרה אינדוקטיבית: $detA := \sum_{j=1}^n (-1)^{n+j} a_{nj} detM_{nj}$

ונדרמונד: $V_n = \begin{vmatrix}1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1}\\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1}\end{vmatrix} = \prod_{1\le j\le i\le n}(x_i - x_j)$

דטרמיננטה במטריצת בלוקים: $\begin{vmatrix}A_{m\times m} & B_{m\times n}\\ 0_{n\times m} & C_{n\times n}\end{vmatrix} = \det(A)\det(C)$.

$\det\begin{pmatrix}A_1&\cdots&*\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ 0&\cdots&A_n\end{pmatrix} = \det(A_1)\det(A_2)\cdots\det(A_n)$.

נוסחה מפורשת: $\det(A) = \sum_{\sigma\in S_n} sgn(\sigma)\prod_{i=1}^n a_{i,\sigma_i}$.

כאשר S_n קבוצת כל התמורות באורך n ($\#S_n = n!$).

(ת) דרגה ודטרמיננטה: $rk(A)=k$ שקול לכך ש:

1. קיים מינור בגודל $k\times k$ שהדטרמיננטה שלו שונה מאפס.
2. כל מינור בגודל $(k+1)\times(k+1)$ הדטרמיננטה שלו שווה לאפס.

מטריצה מוצמדת ($adjoint$)

הגדרה: $(adjA)_{ij} = (-1)^{i+j}detM_{ji}(A)$

משפט: $A*adj(A) = adj(A)*A = detA*I_n$

אם מטריצה הפיכה אזי: $A^{-1} = \frac{1}{detA}adj(A)$.

(ת) טענה: תהי $A\in M_n(F)$:

1. אם $rk(A) = n$ אזי $rk(adjA) = n$.
2. אם $rk(A)\le n-2$ אזי $rk(adjA) = 0$.